



TITLE:

水工計画における二変数統計的手法に関する研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

長尾, 正志

CITATION:

長尾, 正志. 水工計画における二変数統計的手法に関する研究. 京都大学, 1972, 工学博士

ISSUE DATE:

1972-01-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r1925>

RIGHT:

水工計画における二変数
統計的手法に関する研究

昭和46年9月

長 尾 正 志

水工計画における二変数統計的手法に関する研究

目 次

緒 論	5
1 概 説	5
2 水工計画における水文量の多変数統計の意義	6
2・1 水工計画の計画基準の推移	6
2・2 治水計画上の諸問題	8
2・3 利水計画上の諸問題	12
3 多変数統計に関する研究動向	14
3・1 多変数統計の基礎的研究	14
3・2 多変数統計の応用手法	15
4 本研究の内容	17
第1編 二変数統計的手法に関する基礎的研究	22
第1章 二変数正規分布の基礎的特性	22
1・1 基 礎 式	22
1・2 線型結合和の分布	25
第2章 二変数ガンマ分布および二変数指数分布の基礎的特性	30
2・1 形状母数の異なる二変数ガンマ分布	30
2・2 形状母数の等しい二変数ガンマ分布	39
2・3 形状母数の等しいガンマ型変数の和の分布	43
2・4 二変数指数分布	46
2・4・1 基 礎 式	47
2・4・2 条件付非超過確率	52
2・4・3 和の分布	54
第3章 二変数分布の母数推定に関する理論的研究	58
3・1 概 説	58
3・2 全標本による母数推定	58

3・2・1	二変数ガンマ分布における母数推定	59
3・2・2	二変数指数分布における母数推定	64
3・3	部分標本による母数推定	64
3・3・1	部分標本の選び方	64
3・3・2	二変数正規分布における母数推定	65
3・3・3	二変数ガンマ分布における母数推定	71
3・3・4	二変数指数分布における母数推定	80
第4章	二変数指数分布の母数推定に関する数値実験的研究	83
4・1	概 説	83
4・2	全標本による母数推定値の検討	85
4・2・1	標本発生法	85
4・2・2	周辺分布の母数推定値の変動	89
4・2・3	相関母数の推定値の変動	90
4・3	部分標本による母数推定値の検討	94
4・3・1	部分標本の選び方	94
4・3・2	一変量の上位標本の場合	96
4・3・3	二変量の上位標本の場合	98
4・4	部分標本を全標本とみなした回帰特性の検討	99
4・4・1	一変量の上位標本の場合	99
4・4・2	二変量の上位標本の場合	105
4・5	正規化変数の相関特性との比較	108
4・5・1	理論的考察	108
4・5・2	数値実験による検討	110
第2編	二変数統計的手法の水工計画への応用に関する2, 3の研究	117
第1章	水文資料の模擬発生に関する研究	117
1・1	水工計画における模擬発生手法の有用性	117
1・2	水文資料時系列のモデル化	118
1・2・1	年周期性の検出	118
1・2・2	年間の季節分割	123

1・3	水文資料の模擬発生の手法	125
1・3・1	基礎資料の抽出法	125
1・3・2	模擬発生の手法	127
第2章	水系の安全性と洪水処理施設の操作・配置に関する研究	139
2・1	治水計画問題の二変数統計的处理	139
2・2	水系の安全性の確率的評価	142
2・2・1	計画基本量による高水生起の確率表示	142
2・2・2	洪水処理による高水の変形	143
2・2・3	洪水処理施設の治水機能の確率論的評価	145
2・3	洪水処理施設の操作・配置の最適化	148
2・3・1	洪水調節池における最適操作	148
2・3・2	合流河道における計画高水流量の配分	151
第3章	利水用貯水池による渇水補給に関する研究	158
3・1	利水計画における二変数問題の一変数統計的处理	158
3・2	流入量系列のランダム化	159
3・3	貯水量確率の時間的变化	162
3・3・1	基礎的仮定	162
3・3・2	貯水量分布の時間的变化	163
3・3・3	継続期間と渇水確率の関係	169
3・3・4	適用例	170
結 論		178
付 録	二変数指数分布における条件付非超過確率の数表	181
1.	ρ, ξ および η に対する $F(\xi \eta)$ の数表	182
2.	$\rho, F(\xi \eta)$ および η に対する ξ の数表	200

緒 論

1 概 説

わが国は，その置かれている自然条件・社会条件により，一度，洪水が襲来すれば大災害を誘発する危険を内蔵しているとともに，最近においては，水需要の量的増大とその地域的再配分を計る必要に迫られている。したがって，このような重要問題に対処するために，各地で水工計画の根本的な再検討が真剣に論議されている。

この検討には，もちろん水工計画上の基本量である河川流出に関する諸現象の科学的解明が重要であることはいうまでもないが，現在のところ，物理的法則の追求だけで問題解決を計ることは困難であるといえよう。すなわち，河川流出現象およびその原因となる降雨現象は極めて複雑多岐にわたる自然現象であり，水工計画の中へそれら水文量の不確定性をどのように勘案するかが極めて重要な課題となっている。

このために，従来，統計理論の水工計画分野への応用として，いわゆる水文統計学が開発・研究され幾多の成果を収めてきた。しかしながら，その手法としては，たとえば，従来の計画高水流量の決定において，最大流量の超過確率のみが考察の対象とされていたように，いわゆる一変数統計的手法がその中心であったといえよう。

ところで，たとえば洪水防御を対象として考えても，普通，防御手段には堤防，貯水池，遊水池，水門など多くの種類があり，計画対象となる基本量にも最大流量，継続時間，総流量，本川支川の合流時差など多様で，しかも現実には利水面への配慮も同時に行なわねばならない以上，適切な計画策定には多変数統計的手法が強く要求されるのである。

しかしながら，その基礎となる統計理論についてみると，正規分布を除いて一般的な多変数統計理論は現在ほとんど未開発であるといっても過言でない。しかも，水文量の分布はそのままでは，普通正規分布に従うことは非常に少なく，ガンマ分布あるいはその特別な場合としての指数分布などの非対称分布に従うことが多いことが知られている。

さて，本研究は多変数統計的手法の開発とその水工計画への適用を目的と

し，基礎的段階としての二変数統計理論の開発および適用を，とくに，二変数正規分布，二変数ガンマ分布およびその特別な場合である二変数指数分布について考察し，問題解決の方向を明らかにしようとしたものである。

2 水工計画における水文量の多変数統計の意義

2・1 水工計画の計画基準の推移

水工計画上の問題点を明らかにするために，その根本になる計画基準が現在までどのように採られてきたかを概観してみる。なお，従来の水工計画の性格上，主として治水計画を中心にして述べることにする。

わが国の近代河川工事は，明治22年の河川法の制定を発端とするが，戦前の河川工事は築堤を主体とした治水事業に重点が置かれ，その基準を河道の特定地点における既往洪水流量に求めていたことは周知のとおりである。

戦後，西日本，利根川，北上川などの大水害を契機に，昭和22年内務省治水調査会により主要河川の治水計画は再検討され，従来の河川改修に加えて上流部に貯水池，遊水池を設けるように計画の再編成が行なわれた。一方，経済再建のための水需要も強くなり，TVAの成功などが刺激となり，治水・利水のための多目的ダムが各地で建設された。その結果，洪水処理施設の建設，操作，管理にも単に洪水被害の軽減のみならず，水資源の有効利用を含めた複雑で高度な要請が課せられることになった。さらに巨額の投資を要する河川事業には，企業としての経済的有用性が強く求められ，洪水被害額，利水便益額などの算定，あるいは治水上の安全性評価としての最大流量の超過確率の算定など，計量経済学ないし数理統計学的な考慮がなされるに至った。

このような情勢を反映して昭和32年に建設省において河川砂防技術基準が出され，基本高水という概念が従来の計画高水流量に代って採用されるところとなった。これは，洪水調節用貯水池を含む治水計画では，もはや洪水の最大流量のみでは対処できず，さらに，洪水の総流量，継続時間，本支川の最大流量の時差などの数多くの関連要因を勘案しなければならないこと，

換言すれば、洪水の時間流量曲線そのものが計画基準として重要となってきたことを示唆しているといえる。

しかし、基本高水の決定には、計画対象地域の重要度に応じて年超過確率を考慮するものとし、およその基準としてA級 $1/80 \sim 1/100$ 、他、B級、C級に具体的な値を規定している。¹⁾したがって、この砂防技術基準の定める基準は、実際には既往最大洪水を採用したものと大差なく、その上で、全国河川間のバランスを図ったものと考えられる。

その後、昭和34年東海地方を中心とした伊勢湾台風による壊滅的な被害は、既往最大中心の計画基準に対して根本的な検討を余儀なくさせる一方、社会の急激な進展に即応した水の高度利用を兼ねた治水計画の樹立が強く要望されるところとなった。これら多年の懸案が、河川法の改正となり、昭和40年より新河川法として施行されるに至ったのである。すなわち、全国河川は水系別に一級・二級河川に区別され、それぞれに管理責任の所在が明確に規定されている。²⁾したがって、治水においても、水系の各部で別個に行なうのではなく、上流から河口まで水系ごとに一貫した思想の下に、利水を含めて総合的に計画されるべきことが義務づけられるに至ったといえよう。

一方、最近、利根川、淀川、木曾川などの重要河川で、流域の安全性を飛躍的に高めるために、治水計画基準を大巾に改訂しようとしている。前述のように、これまでのこれら河川の治水計画基準は、河川砂防技術基準のA級として年超過確率がほぼ $1/100$ 程度であったのを、上流支川の影響を勘案した本川の総合的な年超過確率として、 $1/200$ 程度にし安全性を一段と向上させようとしている。これには、もちろん、通常、明治以来今日まで経験しなかった大規模な高水を対象としなければならないが、これら計画が合理的に立案・実施されるには、なお幾多の問題点を残している。

とくに、根本的な問題は前述の水系一貫した計画といっても一体何をもって一貫させるかという点にある。すなわち、水系の内部に多くの計画対象地点を有するような場合に、水系全体としてどのような計画基準を採り、また各地点にそれをどのように配分していくかについてはいまだに明確な指針が示されていないように思える。しかし、治水計画を例にとれば、治水が安全に対する要求である以上、何らかの方法で安全度を各地点ごとに評価し、つ

いで、地点間で地域的な要請にも均衡するように調和を計っていくことは十分可能であると考えられる。このうち、前者は主として、水文学・河川工学・統計学などの自然科学の対象分野であり、後者は主として、経済学・社会学、政治学などの社会科学の分野であるが、両者は相互に関係しており、緊密な協力が望まれるところである。

2・2 治水計画上の諸問題

ここでは、まず治水計画の内容と、その目的達成の要件を考察してみる。いうまでもなく、治水とは流域内住民の生命・財産などを洪水被害から防護することで、人間の安全に対する強い要求の表われである。これは、必ずしも現状の安全維持に留まらず、たとえば、活動の場を拡大したり、より高い安全性を求めたりすることも当然含まれるわけである。

このように治水を、自然現象である洪水と人間活動の安全性に対する要求との間の矛盾解決の手段と考えると、当然その自然的・社会的環境が密接に関連してくることは明白である。とくにわが国の場合、集中豪雨の発生しやすい水文気象条件に加えて、狭小な平地部に人口・産業が集中し、高度な社会活動が営まれているという社会環境によって、住民の大半は何らかの形で毎年洪水の脅威にさらされている。

したがって、洪水被害の脅威を防止・軽減するには、なんらかの治水対策を必要とし、必然的に共同体としての社会資本を投入せざるを得ない。ところで、この共同体としては、治水計画以外にも、たとえば道路・水道など他の資本投入が必要であるから、治水の重要性を強調するためには、その有効性を計量・評価しなければならない。このための評価には普通、計量可能な経済的測度が用いられる。もちろん、この際人命などの評価の困難な要素が多分に含まれてはいるが、評価可能な資産の損失のみを対象にしても、なおかなりの経済性を有することが種々の調査で報告されている。³⁾

したがって、治水計画あるいは広く河川計画では、その事業効果の計量経済的評価が作業の中心となるので、その場合の問題点をつぎに列挙してみよう。

- (1) まず、一般に勘案すべき要因の数が極めて多い。これには、洪水や豪雨に関係する各種水文量、地形・地質などの自然的要因の他に、人口・資産額などの経済・社会的要因までの多種多様のものが含まれる。
- (2) つぎに、それら諸要因には不確定な性格が強い。とくに計画対象となる豪雨などの水文事象は極めて偶発性の強い異常現象である。したがって、将来における洪水の最大流量などを決定論的に推定することは極めて困難で、現在のところ既往の観測資料に基づいた統計的な推定による以上に有効な方法があるとは考えられない。とくに、その統計的推定には、平均値から極端に離れた極値に対する推定が重要である。
- (3) さらに、要因相互間の依存関係を的確に評価して計画に導入する必要がある。たとえば、各要因を確率変数とみなすならば、変量相互間の依存の程度は一般に相関係数によって表現できるから、その定量化と評価が問題になる。

以上の問題点を総合すると、治水計画の基礎として流域における洪水処理機能からみた安全性の計量が不可欠になってくる。

それでは、つぎに治水上の安全度は何をもって表現すべきかについて、治水構造物の工学的設計という観点から考察してみよう。一般に、工学的な破壊に対する安全度は加えられた外力の大きさとそれに抵抗する構造物の強度との相対的な大小関係によって決定される。治水計画において、外力とは洪水の惹起する破壊力であり、抵抗力とは、最終的に洪水に対して直接抵抗し人命・財産などを護るための構造物である。このような最終的な防災機能を担っているものは、普通堤防であり、その破壊は直ちに一般資産の被害のみならず、人命の損傷にまで及ぶことは度々経験されるところである。したがって抵抗力とは堤防の極限破壊強度であるといえる。

もちろん、現状では、このような破壊力・抵抗力を直接計測し計画に織りこむことは不可能に近いため、当面、堤防破壊に係る諸要因、たとえば、最大水位・最大流量・継続時間などの洪水波型要素や、堤体の寸法・形状・材料などの施工上の要因の中から主要なものを計画基本量として選定し、外力・抵抗力の関係を決定していかざるを得ない。しかも、外力・抵抗力の不

確定性の度合を比較すると、洪水に起因する外力の不確定性ははるかに大きいことより、とくに計画基本量としての外力の選定が治水計画上もっとも重要であるといえる。したがって、計画基本量としての外力の発生および水工施設の治水効果額の算定について簡単に考察しておく。

1) モデル高水の模擬発生

計画に用いる高水は必ずしも実在の洪水としての性質をすべて持たなくてもよく、施設の治水機能に関連する高水要因を具えていれば十分である。たとえば堤防計画における外力には、普通最大水位や継続時間を、さらに堤防が強固で越流以外の破壊が考えなければ最大水位のみで表わされる高水を選定すればよい。選定された要因を持った既往洪水の内から、生起確率の評価などを行なって検討対象となるモデル高水が定まり、さらに経済的・社会的な検討を重ねて最終的な計画高水が決定される。

ところで、実際には、モデル高水の洪水処理前後の相違や生起確率の評価を十分詳細に行なえるほどに洪水の観測資料が存在しないのが普通である。そこで、最近、以下に述べるように、豪雨資料の模擬発生を基礎にした流量シンセシス (streamflow synthesis) の手法、あるいは、模擬発生された高水群を用いた高水調節効果の評価法を総称したシミュレーション手法による解析法が開発されてきている。

すなわち、模擬発生上の根底になる相関性を考慮した二変数統計の理論およびその適用手法の開発に関して各種の試みが行なわれているが、いまだ十分とはいえず、とくに、正規分布以外の非対称分布についてのモデル化が要望されている。

2) 治水効果額の算定

ここでは、前述のようにして得られたモデル高水を用いて治水効果額を評価する際の問題を考えてみる。

治水効果を経済効果で表現すると、洪水現象の不確定性を考慮すれば、治水施設の効果は、統計的な期待値としての施設建設前後の洪水被害額 E_1, E_2 の差、すなわち被害減少額 $E_1 - E_2$ によって評価できる。その内

容の定式化を考えてみよう。

施設の治水機能に関係する高水要因を x, y, \dots とすると、施設建設前の被害期待額 E_1 は次式で表わすことができる。

$$E_1 = \iint \dots \int_{\alpha}^{\infty} D(x, y, \dots) f(x, y, \dots) dx dy \dots \quad (2 \cdot 2 - 1)$$

ここに、 $D(x, y, \dots)$; x, y, \dots が同時に生じた場合の被害額、 $f(x, y, \dots)$; x, y, \dots の確率密度関数、 α ; 被害の発生する x, y, \dots の下限である。

つぎに、施設の治水機能によって x, y, \dots が x', y', \dots に、また α が α' に移ったとすると、施設建設後の被害期待額 E_2 は前と同様に、

$$E_2 = \iint \dots \int_{\alpha'}^{\infty} D(x', y', \dots) f(x', y', \dots) dx' dy' \dots \quad (2 \cdot 2 - 2)$$

と書ける。ところで、施設の治水機能が、

$$x' = x'(x, y, \dots), y' = y'(x, y, \dots), \dots \quad (2 \cdot 2 - 3)$$

と表わせたとすれば、(2・2-3)式は、もとの変量を使って、次式のように表現できる。

$$E_2 = \iint \dots \int_{\alpha}^{\infty} D(x'(x, y, \dots), y'(x, y, \dots), \dots) \times f(x, y, \dots) \cdot \partial(x', y', \dots) / \partial(x, y, \dots) dx dy \dots \quad (2 \cdot 2 - 4)$$

したがって以上の諸式の内容によって、治水効果額の算定に際して、何が重要となるかは明らかであるが、とくに高水要因の不確定性を考えれば、確率密度関数の推定が肝要であるといえる。すなわち、施設の治水機能に関連する高水波型は多様であり、したがって、計画基本量として選定すべき高水要因も少なくないし、要因間の相関も無視することはできないのが通例である。

以上，治水計画の内容および問題点を，高水計画のシミュレーションおよび治水効果額の算定を通じて考察したが，多変数統計的な解析はその基礎的手段として重要な役割を担っているといえよう。

2・3 利水計画上の諸問題

利水計画は当然，治水計画と関連する面が多く，これまで述べてきた内容と重複する部分も多いので，ここでは，とくに利水において問題となる事項を取り上げて簡単に考察するにとどめる。

まず，利水計画における計画規準については，既往の主要渇水年を考慮して基準となる渇水を定めていたようで，基準渇水として普通過去10年間の既往渇水中の第2位または第3位程度の規模の渇水を選んでいたのである。しかしながら，たとえば農業用水は，工業用水や上水道用水のように定常的な需要ではなく，年間で灌漑期だけ要求されるもので，補給総水量からみた渇水と，自然流況からみた渇水とは必ずしも一致しない。また，既往第2，3位の渇水年を基準とする考えは，治水計画の基準として過去10年中で既往最大またはそれに準じた出水を対象として基本高水が決定されることに相当し，計画の信頼性に関する情報として極めて不十分であるといわねばならない。

このような計画基準が採られる原因には，信頼すべき流量資料を長期間にわたって得ることが困難であったことによると考えられる。しかし，前述したような降雨の模擬発生およびその流量へ変換を行えば，かなり長期にわたる資料を作製することも現在では技術的に可能である。また，渇水による被害は，洪水被害に比べてそれほど決定的ではないから，確率的な評価を計画基準の合理的な策定に盛りこむことは，十分可能であるといえよう。

つぎに渇水といえは，従来その量的な面だけが問題にされ勝ちであったが，実際上の水利用においては，たとえば何日間不足が続くといった時間的な面からの検討も重要で，このためには，流量あるいはその原因である降雨事象の時系列特性の解明が必要であることはいうまでもあるまい。

最近とくに水資源の涸渇がさげられるもっとも主要な理由は，水利用の地

域性によるものである。このため、いわゆる広域利水が問題にされているが、その場合、異なって水系間の流量系列の間の相互相関性の程度が、流量の自己相関性と関連して、利水の可能性を評価する重大な鍵となるわけである。これらの利水問題は、もちろん治水と表裏一体をなすもので、貯水池群の統合管理という現在の河川計画におけるもっとも主要な問題として科学的な解決が強く要望されている。

以上、治水・利水計画の問題点を考察してきたが、その基本として要求されるのは数多くの水文量を同時に勘案した多変数統計的な解析であるといえることができる。このように、多変数統計の重要性は認識され始めてはいるが、実面的な面からの研究は甚だ不十分なのが実状である。そこで、つぎにその研究動向について述べることにする。

さて、以上述べたところによって、水工計画においては水文量の多変数統計に関する研究が、その根底として極めて本質的な役割を果たすことが諒解されよう。そこで、この方面の現在までの研究動向の概要を述べ、若干の批判を行なってみよう。順序として、まず基礎となる数学理論上の発展を、つぎに水工計画の応用に関する研究を述べる。

参 考 文 献

- 1) 建設省；河川砂防技術基準，第2編，第2章，1957, pp. 215—220
- 2) たとえば，建設省河川局水政課編；新河川法解説，別冊時の法令，大蔵省印刷局 1964. pp. 8—14
- 3) 渡辺隆二，長茂昭；治水，その事業の経済的分析，土木学会誌，53巻 1968.5，pp. 28—31

3 多変数統計に関する研究動向

3・1 多変数統計の基礎的研究

多変数のなかでも、もっとも基礎的な多変数解析 (multivariate analysis) の理論は、1950年前後からようやく理論的体系が整えられてきた。その方面の内容を知るための代表的なものとして、AndersonやKendallの著書があり、また最近わが国でも、北川・塩谷などによって概要が紹介されている。すなわち、その内容は、Fisher, Pearsonらによる単相関、偏相関、重相関などの解析より始まりWishart分布、つまり正規母集団からの標本における分散、共分散の同時標本分布導出を契機としている。ついで基本分布の誘導、その変換のJacobian、漸近分布などの標本分布論、母集団母数の同時同時信頼区間の問題など多種多様であり、現在に至るまでに基礎理論は一見してかなり進展しているように見える。

しかし、観測資料の記述的段階を経て標本分布に関係する段階に入ると、取扱いうる基礎分布として正規分布が前提となっているのが実情で、これが現在の多変数解析論の大きな弱点である。すなわち、日降水量、時間降水量などの水工計画の基礎になる水文量はそのまま正規分布に従うことは少なく、普通非対称な分布に従う以上、如何に数学的に整然とした理論体系であっても、そのまま実用に供するわけにはいかない。

これに対して、直接非対称分布について、一変数に対する基礎理論を二変数あるいはそれ以上に拡張することによって非対称多変数分布の基本分布を導き、その特性を利用しようとする動きがある。その場合の非対称分布としては、比較的少数の母数で表現しうる簡単な型、たとえば、指数分布、ポアソン分布、ガンマ分布などが多い。ここでは、研究の概要を各分布型について時代順に述べておく。

1934年、Campbellは、ポアソン分布について二変数分布が誘導できることを示し、さらにその回帰曲線が直線となること、その場合の相関母数が通常の標本相関係数と一致するという注目すべき結果を得た。¹⁾ これと同様な誘導によって、二項分布や超幾何分布についての二変数分布がAitkenおよびGoninによって得られている。²⁾

つぎに、1941年KibbleさらにCherianは二変数ガンマ分布を誘導

した。^{3), 4)} とくに Kibble は、主として周辺分布が共通な二変数ガンマ分布について研究し、回帰曲線が直線で与えられる二変数ガンマ分布は Laguerre 多項式または変形ベッセル関数によって表現できることを示した。その後、その多変数分布への拡張を Krishnamoorthy および Parthasarathy が行なっている。^{5), 6)} なお、井沢は若干異なった誘導によって、最終的に Kibble と同じ結果を得ている。⁷⁾

指数分布は、もちろん上記ガンマ分布の特別な場合としても求められるが、表現が簡単で、応用面が広いために、最近、二変数分布の特殊な型が Gumbel⁸⁾ や Freund⁹⁾ によって提案され、回帰回線、分散、相関係数などの基礎的特性が研究されている。しかし、それらは上記ガンマ分布より演繹されたものに比べて著しく一般性を欠くように思える。

また、上記二変数指数分布の変形ともいえようが、最近、Gumbel らによって二変数極値分布に関する研究が行なわれている。^{10), 11)} これらはいずれも周辺分布が極値分布をなす特殊な同時分布を仮定することから理論が出発しているために、現在のところ、一般性に乏しいが、将来、水工計画で幾つかの異常に大きいあるいは異常に小さい水文量を計画基本量としなければならない場合に重要となってくる問題で、今後この方面の普偏性のある理論の確立が要望される。

3・2 多変数統計の応用手法

前述の多変数統計の理論に関する研究と同様に、応用面においても基礎理論のほとんどは正規分布論に準拠している。その内容を水文資料の模擬発生に関するものと、水文量の生起頻度解析に関するものに大別して論議する。

1) 水文資料の模擬発生

計画基本量としての水文資料を種々の検討に供しうる程度に長期かつ大量に作製しようとする模擬発生の手法は、治水・利水を包含した水資源開発計画における実際的な要求から生まれてきたもので、その要求に応じて種々の技術手法が提案されてきている。

まず、豪雨発生の代表的なものに、ChowおよびRamaseshanによる治水計画のための年最大一連降雨を対象とした解析がある。¹²⁾ これは、既往の年最大降雨を相互相関の最も強くなるようにずらして重ね合わせ、類以の降雨曲線群を得た後に、単純マルコフ過程としてその短時間配分を図ったものである。同様な手法によった例として、内水排除計画のための晴天時蒸発量を負の降雨として処理した角屋・丈達による研究¹³⁾があり、直接高水波型の発生を行なった例としてはHufschmidt, Fieringによるリハイ川水資源開発プログラムの中の水文学プログラム¹⁴⁾を挙げることができる。なお、以上はすべて、発生すべき水文量は正規変量に変換できるとして、一次の正規マルコフ過程としての取扱いである。

これに対し、正規分布を前提としない例として、日降水量を指数分布、降水間隔をポアソン分布に近い経験分布として、両者の間の関係を独立とした日降水量系列の発生を試みた石原・池淵の研究¹⁵⁾もあるが、さらに一般的には相関の導入が要求される。

わが国では、資料の信頼性や観測期間の長さなどから、土工計画上の計画基本量として、数日ないし10分間程度の総降雨量あるいは総流量が採用されることが多く、これら水文量の確率分布として、ガンマ分布や指数分布が比較的よく適合することが報告されている。¹⁶⁾ したがって、今後模擬発生には、このような分布の二変数ないし多変数分布の理論と適用手法の開発が要望される。

2) 水文量の生起頻度解析

従来の研究は、ほとんど治水問題を対象としているので、治水計画に限りて簡単に概括し問題点を明らかにするよう試みる。また、この方面の研究は、外国では着想として2, 3見出せる程度で、^{17), 18)} わが国の特殊な環境から要求されてきた問題といえそうである。そこで国内における研究に限定しておくことにする。

まず、多変数統計的な研究の必要性が認識され、実際の計画への適用が試みられたのは、昭和27年の「淀川計画高水論」における淀川本川の年最大高水流量の超過確率の計算¹⁹⁾が端緒であろう。これは二支川、木津川

桂川の各年最大流量の影響を本川流量に対して二変数統計的に検討したもので、当時として、その着想は注目すべきものであったといえよう。

ついで、長沢によって、堤防、貯水池など種々の河川工事計画における複合確率の重要性の強調および二変数正規分布を適用する場合の具体的な計算手法についての提案がなされた。²⁰⁾ ところで、普通、信頼できる高水観測記録の数はあまり多くないし、また一年間で二度以上洪水の襲来する危険も存在することから、各年最大高水を標本とするより、むしろ被害を生ずる全高水を対象にすべきだという観点から、計画超過洪水群の検討を目的とした高水シミュレーションの有用性が木村によって強調された²¹⁾ が、具体的な手法揭示までには至らなかった。

その後、昭和38年に石原・長尾によって、上流に二支川を有する河道の高水の生起確率の計算および、上流部に洪水調節池を有する場合の洪水調節効果の確率的評価の問題²²⁾、また42年には、上流に洪水調節池、下流に堤防で護られた防災対象地域がある場合の高水の生起確率評価の問題²³⁾などが考察された。

さらに最近では、このような手法を具体的な水工計画へ導入することについて、下流部河道の安全性に対する検討²⁴⁾、合流問題への応用など種々の提案が行なわれている。^{25), 26), 27)} なかでも、多変数統計という考えを一貫させて計画基準を策定しようとしたものに、利根川上流域の洪水調節計画²⁸⁾ およびその一部である渡良瀬遊水調節池計画²⁹⁾ をあげることができる。とくに、利根川上流域の計画では計画基本量として、降雨に関して、総雨量、地域分布、時間分布の3要素の独立な組合せを採用し、流出に関する2要素、ピーク流量と総流出量の同時生起確率を計算している。なお、降雨要素の表示、独立としての仮定などに問題はあるが、総合的な手法として注目すべきものといえよう。

4 本研究の内容

以上、治水・利水計画上の諸問題および研究活動の概要を述べ、多変数統計的手法の重要性を指適したが、残されている問題を簡単に整理すると、つぎのようである。

- 1) 水文統計としての二変数ないし多変数統計理論の開発，とくにガンマ分布，指数分布などの直接水文量が適合しやすい分布の多変数統計の基礎理論の開発を行なう。
- 2) 多変数分布に含まれる相関母数などの母数の推定および，推定結果の検定を具体的な標本抽出法と関連させて研究する。
- 3) 上記の理論を実際の土工計画の諸問題に適用する場合の具体的な計算手法を開発する。

したがって，本研究は土工計画における多変数統計的手法の開発・適用の基礎的段階として，二変数統計理論の開発を，主として二変数ガンマ分布およびその特別な場合である二変数指数分布について行ない，その結果の土工計画への適用を試みたものである。研究の内容を概説するとつぎのとおりである。

まず第1編では，二変数統計的手法に関する基礎理論の研究を行なっている。すなわち，第1章では二変数正規分布の基礎的特性を述べ，さらに相関を考慮した二変量の線型結合和の分布を誘導する。第2章では二変数指数分布の基礎的特性について研究するが，まずその基礎となる二変数ガンマ分布に関する基礎式および和の分布を求め，それより二変数分布に対する結果を誘導する。

第3章では，二変数分布の母数推定に関する理論的研究を行なっている。まず，母集団全体から標本が得られる場合について，二変数ガンマ分布，二変数指数分布における母数推定を行なう。ついで，標本が上位に限定された部分標本である場合について，二変数正規分布，二変数指数分布について，母数を推定する。ついで第4章では，こうして理論的に誘導された二変数指数分布の母数推定の結果を電子計算機を使った数値実験によって実証的に検討する。

第2編は，上記の二変数統計的手法を土工計画の問題に適用した研究を述べる。まず，第1章では水文基礎資料の模擬発生に関する問題を取扱う。すなわち，水文量の時系列特性とそのモデル化において基礎となる年周期性の検出，季節分割などについて考察し，模擬発生の具体的手法，基礎資料の抽出法，二変数分布型の選定について考察し，二変数指数型モデルによる短時

間豪雨の模擬発生の例について述べる。

つぎに，第2章は水系の安全性と洪水処理施設の操作・配置に関する問題を扱っている。すなわち，水系の安全性の二変数確率的評価として高水の生起確率の表示，洪水処理による洪水変形を勘案することによって洪水処理施設の治水機能の確率的評価について述べる。ついで，洪水処理施設の操作・配置に関する問題として，洪水調節池における最適操作，合流河道における計画高水流量の配分について検討する。

第3章では，利水用貯水池による渇水補給の問題を考察するが，この場合流量時系列の処理として相関を考慮した二変数統計問題として直接取扱わず一変数問題として処理する方法を提示する。すなわち，貯水池への流量系列をランダム化し，確率的な在庫問題として，季節的特性を考慮した貯水量確率の時間的变化を論じ，渇水確率の推定，継続期間と渇水確率の関係などの研究を行なう。

最後に，結論として，上記の成果を要約するとともに，残された問題の指摘を試みている。

参 考 文 献

- 1) J. T. Campbell ; The Poisson correlation function , Proceeding of Edinburgh Mathematical Society , series 2 , vol. 4 , 1934 , pp. 18-26.
- 2) A. C. Aitken and H. T. Gonin ; On fourfold sampling with or without replacement , Proceeding of Royal Society of Edinburgh , section A , vol. 55 , 1935 , pp. 114-125.
- 3) W. F. Kibble ; A two-variate gamma type distribution, The Indian journal of Statistics, vol. 5, 1941, pp. 137-150.
- 4) K. C. Cherian ; A bivariate correlated gamma-type distribution function, The journal of the Indian Mathematical Society, vol. 5, 1941, pp. 133-144.
- 5) A. S. Krishnamoorthy and M. Parthasarathy ; A multi-vari-

- ate gamma-type distribution, The annals of mathematical statistics, vol. 22, 1951, pp. 549-557.
- 6) A. S. Krishnamoorthy and M. Parthasarathy ; Correction to "A multivariate gamma-type distribution." The annals of mathematical statistics, vol. 31, 1960, p. 229.
 - 7) 井沢亀夫；二変数の Γ 一分布について（降水量の分布，第2報），気象と統計，第4巻第1号，1953年7月，気象統計懇話会，pp. 9-15.
 - 8) E. J. Gumbel ; Bivariate exponential distributions, journal of the American Statistical Association, vol. 55, 1960, pp. 698-707.
 - 9) J. E. Freund ; A bivariate extension of the exponential distribution, journal of the American Statistical Association, vol. 56, 1961, pp. 971-977.
 - 10) E. J. Gumbel and N. Goldstein ; Analysis of empirical bivariate extremal distribution, journal of the American Statistical Association, vol. 59, 1964, pp. 794-816.
 - 11) E. J. Gumbel and C. K. Mustafi ; Some analytical properties of bivariate extremal distributions, Journal of the American Statistical Association, vol. 62, 1967, March, no. 317, pp. 569-588.
 - 12) V. T. Chow and S. Ramaseshan ; Sequential generation of rainfall and runoff data, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulic Division, no. HY4, 1965, pp. 205-223.
 - 13) 角屋 睦・丈達俊夫；日雨量系列の模擬発生と内水排除計画への適用，土木学会第4回年次講演会概要，昭和44年9月，pp. 105-108.
 - 14) M. M. Hufschmidt and M. B. Fiering ; Simulation techniques for design of water resources systems, Harvard University Press, Massachusetts, 1969, pp. 125-129.
 - 15) 石原藤次郎・池淵周一；日降水量系列のシミュレーションに関する研究，

- 土木学会第5回年次学術講演概要，昭和45年11月，pp. 177-180.
- 16 たとえば，鈴木栄一；気象統計学，地人書館，pp. 7-8.
- 17 J. R. Sheaffer ; Flood-to Peak Interval, Papers on Flood Problems, Chapter VII, Department of Geography, The University of Chicago, Research Paper, no. 70, 1961, pp. 95-113.
- 18 E. Kuiper ; Water resources development, Chapter 2, Hydrology, Peak-volume relationship, 1965, pp. 40-42.
- 19 建設省近畿地方建設局；淀川計画高水論，昭和27年3月，pp. 118-121.
- 20 長沢敏夫；複合確率と河川工事計画におけるその応用について，建設省直轄工事技術研究報告，第14回，昭和35年，pp. 791-796.
- 21 木村俊晃；狩野川洪水の検討－異常洪水にどう対処するか，建設省土木研究所報告106，1961，pp. 63-81.
- 22 石原安雄・長尾正志；計画高水流量の二変数確率論的研究，京大防災研究所年報，第6号，昭和38年7月，pp. 181-188.
- 23 長尾正志；洪水処理計画に関する確率論的研究，京大防災研究所年報，第10号B，昭和42年3月，pp. 41-51.
- 24 藤原軍治・苗村滋克；下流部河道の安全に関する研究，建設省直轄工事技術研究報告，第19回，昭和40年，pp. 601-606.
- 25 栗林宗人；多次元確率と合流問題，建設省直轄技術研究報告，第20回，昭和41年，pp. 695-698.
- 26 谷口雅宥・伴登義懿；降雨特性を考慮した基本流量決定法に対する一考察，建設省直轄技術研究報告，第21回，昭和42年，pp. 767-771.
- 27 佐々木賢一・尾田栄章・井上十三夫；多元確率による降雨・水位確率の統一的研究，第23回土木学会年次学術講演会講演概要，昭和43年10月，pp. 167-170.
- 28 建設省関東地方建設局；利根川上流域洪水調節計画に関する検討，利根川流量検討資料，昭和44年7月
- 29 永井靖郎；遊水調節池計画に関する研究，京都大学博士論文，昭和43年12月

第 1 編 二変数統計的手法に関する基礎的研究

第 1 章 二変数正規分布の基礎的特性

正規分布は，各種の確率分布の中でもっとも基礎的な分布型として多くの研究者によって古くから研究されてきており，また互に独立な n 個の確率変数の和が， $n \rightarrow \infty$ に伴い，ある種の条件の下で，正規分布に漸近するといういわゆる，中心極限定理もあって，応用面のきわめて広い重要な分布と目されている。

さらに，二次元ないし多次元分布の諸特性についても多くのことが知られており，数学的にはほとんどの問題が解明されているとみてよい。ただこれらの実際的な応用に際して留意すべき問題も幾つか残されているが，その詳細については後で述べることにして，ここでは以後の考察に必要な二変数正規分布の基礎的特性について取りまとめるとともに，二変数の線型結合和の分布を誘導しておく。

1.1 基礎式

1) 密度分布，周辺分布，条件付分布

まず，二変数 x_1, x_2 に関する二変数正規分布の密度分布関数は周知のよ

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\} \right\} \quad (1.1-1)$$

ただし m_1, m_2 ; σ_1^2, σ_2^2 ; ρ はそれぞれ x_1, x_2 の平均値，分散，相関係数である。上式より x_1, x_2 の周辺分布 $f_1(x_1), f_2(x_2)$ および x_1 が与えられ

たときの x_2 の条件付分布 $f(x_2|x_1)$ はそれぞれ (1.1-2), (1.1-3) 式のような正規分布に従う。

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \quad (1.1-2)$$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{(x_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}$$

$$f(x_2|x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \left\{ x_2 - m_2 - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - m_1) \right\}^2 \right] \quad (1.1-3)$$

2) 積 率

一般に, 平均値のまわりの x_1 について p 次, x_2 について q 次の積率 μ_{pq} はつぎのように定義される。

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)^p (x_2 - m_2)^q f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.1-4)$$

これを直接求めることは, かなりの困難を伴うので, よく次式で定義される特性関数 $Q(z_1, z_2)$ が利用される。

$$Q(z_1, z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z_1 x_1 + z_2 x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$= \exp \left[i(m_1 z_1 + m_2 z_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 z_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 z_1 z_2 + \sigma_2^2 z_2^2) \right] \quad (1.1-5)$$

これを用いると μ_{pq} は次式より求められる。

$$\mu_{pq} = \frac{1}{(i)^{p+q}} \left[\frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q} \{ Q(z_1, z_2) \} \right]_{z_1=z_2=0} \quad (1.1-6)$$

具体的に, p, q に 0, 1, 2 などを代入して計算すると, たとえば

$$\mu_{10} = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} \{ Q(z_1, z_2) \} \right]_{z_1=z_2=0}$$

$$= \frac{1}{i} \left[Q(z_1, z_2) \cdot (im_1 - \sigma_1^2 z_1 - \rho\sigma_1\sigma_2 z_2) \right]_{z_1=z_2=0} = 0$$

同様にして

$$\begin{aligned}
 \mu_{01} &= 0 \\
 \mu_{11} &= \frac{1}{(-1)} \left[\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \left\{ Q(z_1, z_2) \right\} \right]_{z_1=z_2=0} \\
 &= \frac{1}{(-1)} \left[Q(z_1, z_2) \left\{ (im_1 - \sigma_1^2 z_1 - \rho \sigma_1 \sigma_2 z_2) (im_2 - \sigma_2^2 z_2 - \rho \sigma_1 \sigma_2 z_1) - \rho \sigma_1 \sigma_2 \right\} \right]_{z_1=z_2=0} = \rho \sigma_1 \sigma_2 \\
 \mu_{20} &= \frac{1}{(-1)} \left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \left\{ Q(z_1, z_2) \right\} \right]_{z_1=z_2=0} \\
 &= \frac{1}{(-1)} \left[Q(z_1, z_2) \left\{ (im_1 - \sigma_1^2 z_1 - \rho \sigma_1 \sigma_2 z_2)^2 - \sigma_1^2 \right\} \right]_{z_1=z_2=0} \\
 &= -\sigma_1^2 \\
 \mu_{02} &= -\sigma_2^2
 \end{aligned}$$

また，相関係数は定義によって次式で示される。

$$\frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20} \mu_{02}}} = \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} = \rho$$

このようにして得られる主要な結果をまとめると，つぎのようである。

$$\left. \begin{aligned}
 \mu_{10} &= \mu_{01} = 0 \\
 \mu_{20} &= \sigma_1^2, \quad \sigma_{02} = \sigma_2^2, \quad \mu_{11} = \rho \sigma_1 \sigma_2 \\
 \mu_{30} &= \mu_{03} = 0, \quad \mu_{40} = 3\mu_{20}^2, \quad \mu_{04} = 3\mu_{02}^2
 \end{aligned} \right\} (1.1-7)$$

3) 条件付平均値，条件付分散

x_2 を固定した場合の x_1 の条件付平均値 $E(x_1|x_2)$ は，次式で求められる。

$$E(x_1|x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1|x_2) dx_1 = m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - m_2) \quad (1.1-8)$$

一般に x_2 を変えたときの x_1 の期待値の軌跡が， x_1 の x_2 に対する回帰曲線と定義されるが，上式にみられるように，二変数正規分布の場合の回帰曲

線は直線である。同様に、 x_2 の x_1 に対する回帰曲線は次式で与えられる。

$$E(x_2|x_1) = m_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - m_1) \quad (1.1-9)$$

さらに、 x_2 を固定した場合の x_1 の条件付分散 $D^2(x_1|x_2)$ は

$$\begin{aligned} D^2(x_1|x_2) &= E \left[\left\{ (x_1|x_2) - E(x_1|x_2) \right\}^2 \right] \\ &= E \left\{ (x_1|x_2)^2 \right\} - \left\{ E(x_1|x_2) \right\}^2 \\ &= \sigma_1^2 (1 - \rho^2) \end{aligned} \quad (1.1-10)$$

となる。この結果をみると、条件付分散は指定変数 x_2 に全く無関係に定まるある定数となっている。この等分散性とよばれる性質は、正規分布の重要な性質の一つである。

4) 分布特性値

ここでは、3次以上の分布特性値として歪度および尖度を求めておく。変数 x_1 についての歪度 r_{10} および r_{20} は次式のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} \text{歪度} \quad r_{10} &= \frac{\mu_{30}}{\mu_{20}^3} \\ \text{尖度} \quad r_{20} &= \frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2} - 3 \end{aligned} \right\} \quad (1.1-11)$$

ただし、上式中の μ_{pq} は (1.1-5), (1.1-6) 式で計算でき、その結果として次式を得る。

$$r_{10} = 0, \quad r_{20} = 0 \quad (1.1-12)$$

1.2 線型結合和の分布

いま、二変数 x_1, x_2 が二変数正規分布に従うとき、次式のような二変数の線型結合和 z の分布を考えてみよう。

$$z = Ax_1 + Bx_2 + C \quad (1.2-1)$$

ただし、 A, B, C は定数である。いま、計算の便宜上、 x_1, x_2 を次式の規

準化変量 ξ , η を使って考えていくことにする。

$$\xi = \frac{x_1 - m_1}{\sigma_1}, \quad \eta = \frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \quad (1.2-2)$$

すなわち, (ξ, η) は次式の確率密度分布に従うことになる。

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{\xi^2 - 2\rho\xi\eta + \eta^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \quad (1.2-3)$$

さて (1.2-1) 式の z は ξ, η で表現すると次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= az - b\eta - c \\ \text{ここに } a &= \frac{1}{A\sigma_1}, \quad b = \frac{B\sigma_1}{A\sigma_1}, \quad c = \frac{Am_1 + Bm_2 + C}{A\sigma_1} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-4)$$

また, η を y と記すと, z に関する周辺分布は次式で求められるはずである。

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi(z, y), \eta(z, y)) |J| dy \\ |J| &= \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(z, y)} = \begin{vmatrix} a & -b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a \end{aligned} \right\} \quad (1.2-5)$$

したがって

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ (az - by + c)^2 - 2\rho(az - by + c)y + y^2 \right\}\right\} dy \\ &= \frac{a}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(za - c)^2}{2(1+b^2 + 2\rho b)}\right\} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \sqrt{1+b^2 + 2\rho b} y - \frac{(za - c)(b + \rho)}{\sqrt{1+b^2 + 2\rho b}} \right\}^2\right\} dy \end{aligned}$$

さらに

$$\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left\{ \sqrt{1+b^2+2\rho b} y - \frac{(za-c)(b+\rho)}{\sqrt{1+b^2+2\rho b}} \right\} = u$$

とおくと，密度分布 $f(z)$ は結局次式のように求められる。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+b^2+2\rho b}} \exp \left\{ -\frac{(za-c)^2}{2(1+b^2+2\rho b)} \right\} \int_{-\infty}^{\frac{u}{\sqrt{1+b^2+2\rho b}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi(1+b^2+2\rho b)}} \exp \left\{ -\frac{(za-c)^2}{2(1+b^2+2\rho b)} \right\} \\ &= \frac{a}{\sqrt{1+b^2+2\rho b}} \cdot \varphi \left(\frac{az-c}{\sqrt{1+b^2+2\rho b}} \right) \quad (1.2-6) \end{aligned}$$

ただし， $\varphi(x)$ は標準正規変量 x の確率密度関数で，次式で定義される。

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \quad (1.2-7)$$

つぎに，累積分布関数 $F(z)$ は，以上の結果から次式のように表わせる。

$$F(z) = \frac{a}{\sqrt{1+b^2+2\rho b}} \int_{-\infty}^z \varphi \left(\frac{az-c}{\sqrt{1+b^2+2\rho b}} \right) dz$$

そこで，

$$\frac{az-c}{\sqrt{1+b^2+2\rho b}} = v$$

とおき，積分変数を z より v に変換すると，結局 $F(z)$ は次式のような簡単な形で表わされる。

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(az-c)\sqrt{1+b^2+2\rho b}}{a}} \exp \left(-\frac{v^2}{2} \right) dv \\ &= \Phi \left(\frac{az-c}{\sqrt{1+b^2+2\rho b}} \right) \quad (1.2-8) \end{aligned}$$

ただし、 $\Phi(x)$ は正規確率積分で次式で定義されるものである。

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (1.2-9)$$

以上によって、線型結合和 z の密度分布、累積分布は、もとの変数 x_1, x_2 の周辺分布と同様正規分布に従うが、線型結合の関数型および相関係数 ρ の大きさによって、平行移動、拡大または縮小されていることがわかる。

さて、(1.2-4) 式で最も簡単な場合として、 $a=b=1, c=0$ すなわち z が規準化変量 ξ, η の和で表わされる場合を考えると、密度分布 $f(z)$ および累積分布 $F(z)$ は、それぞれ (1.2-6), (1.2-8) 式によって次式のようになる。

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\rho)}} \cdot \varphi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1+\rho)}}\right) \quad (1.2-6')$$

$$F(z) = \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1+\rho)}}\right) \quad (1.2-8')$$

種々の ρ および z に対する $F(z)$ の値を計算すると表 1.2-1 のようになる。

表 1.2-1 二変数正規分布における和の分布

$$F(z) = \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1+\rho)}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(1+\rho)}} \int_{-\infty}^z \exp\left\{-\frac{t^2}{4(1+\rho)}\right\} dt$$

$\rho \backslash z$	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
1.0	0.5000	0.5497	0.5987	0.6462	0.6915	0.7340	0.7734	0.8092	0.8413	0.8944	0.93119	0.95994	0.97725	0.98778	0.991790
0.9	0.5000	0.5510	0.6012	0.6498	0.6960	0.7393	0.7792	0.8153	0.8476	0.90017	0.93809	0.96371	0.97991	0.98951	0.994840
0.8	0.5000	0.5524	0.6039	0.6537	0.7009	0.7450	0.7854	0.8218	0.8541	0.90618	0.94407	0.96735	0.98249	0.991147	0.995796
0.7	0.5000	0.5539	0.6069	0.6579	0.7042	0.7511	0.7920	0.8287	0.8610	0.91242	0.94813	0.97117	0.98497	0.992667	0.996652
0.6	0.5000	0.5556	0.6101	0.6625	0.7119	0.7577	0.7991	0.8360	0.8682	0.91887	0.95323	0.97480	0.98732	0.994057	0.997405
0.5	0.5000	0.5574	0.6136	0.6675	0.7181	0.7648	0.8068	0.8438	0.8759	0.92553	0.95836	0.97814	0.98954	0.995298	0.998051
0.4	0.5000	0.5594	0.6175	0.6730	0.7249	0.7725	0.8150	0.8522	0.8840	0.93243	0.96351	0.98177	0.991587	0.996420	0.998596
0.3	0.5000	0.5616	0.6218	0.6791	0.7324	0.7809	0.8239	0.8611	0.8926	0.93948	0.96859	0.98502	0.993412	0.997370	0.999035
0.2	0.5000	0.5641	0.6265	0.6858	0.7407	0.7901	0.8335	0.8707	0.90165	0.94670	0.97360	0.98806	0.995089	0.998162	0.999376
0.1	0.5000	0.5669	0.6320	0.6935	0.7499	0.8003	0.8441	0.8810	0.91124	0.95405	0.97818	0.990858	0.996500	0.998793	0.999626
0.0	0.5000	0.5702	0.6382	0.7020	0.7602	0.8116	0.8556	0.8920	0.92135	0.96145	0.98305	0.99336	0.997662	0.999269	0.999797
-0.1	0.5000	0.5739	0.6453	0.7119	0.7720	0.8243	0.8682	0.90395	0.93199	0.96880	0.98733	0.995457	0.998566	0.999602	0.999803
-0.2	0.5000	0.5783	0.6537	0.7234	0.7854	0.8385	0.8822	0.91674	0.94308	0.97595	0.991147	0.997171	0.999217	0.999813	0.999961
-0.3	0.5000	0.5837	0.6637	0.7369	0.8010	0.8546	0.8975	0.93043	0.95451	0.98270	0.994386	0.998452	0.999639	0.999929	0.999988
-0.4	0.5000	0.5902	0.6760	0.7532	0.8193	0.8731	0.91456	0.94493	0.96606	0.98876	0.996916	0.999301	0.999870	0.999970	0.999998
-0.5	0.5000	0.5987	0.6915	0.7734	0.8413	0.8944	0.93319	0.96091	0.97725	0.99370	0.998650	0.999767	0.999968	0.999997	
-0.6	0.5000	0.6101	0.7119	0.7991	0.8682	0.91894	0.95323	0.97480	0.98733	0.997406	0.999602	0.999954	0.999996	0.999999	
-0.7	0.5000	0.6265	0.7407	0.8335	0.90165	0.94670	0.97360	0.98806	0.995089	0.999376	0.999946	0.999997	0.999999		
-0.8	0.5000	0.6537	0.7854	0.8821	0.94307	0.97595	0.991147	0.997171	0.999217	0.999961	0.999995				
-0.9	0.5000	0.7119	0.8682	0.95124	0.98733	0.997406	0.999602	0.999955							
-1.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

なお， $\Phi(x)$ の性質によって， $z < 0$ に対して

$$F(z) = 1 - F(-z)$$

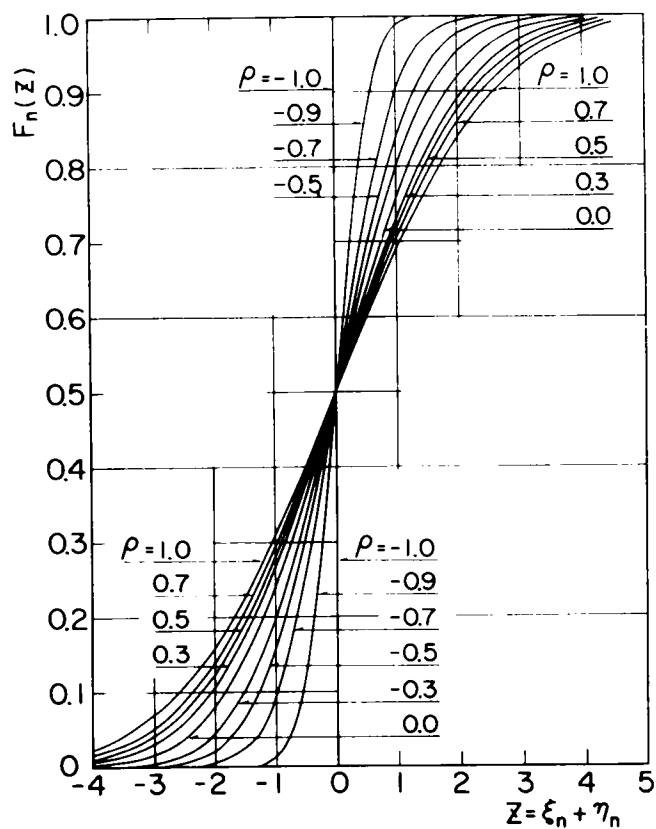
が成立し， z の大きな値に対しては，つぎの漸近展開が可能である。

$$F(z) = 1 - \frac{\varphi(x)}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{15}{x^6} + \frac{105}{x^8} - \dots \right)$$

ただし， $x = z / \sqrt{2(1+\rho)}$

この $F(z)$ の主な ρ に対する変化の概略を示したものが，図 1・2-1 である。

図 1・2-1 二変数正規分布における標準化変量の
和の非超過確率



第 2 章 二変数ガンマ分布および二変数指数分布の基礎的特性

ここでは水文学の分布に広く適合性をもつといわれるガンマ分布を二変数に拡張した理論を展開し、さらにその実際問題への適用上重要な二変数指数分布について詳細に考察した結果を述べる。

2・1 形状母数の異なる二変数ガンマ分布

ガンマ分布 (Γ -分布) は、Pearson のⅢ型分布ともいわれ、その母数の選択に応じて、正規分布に近い形から、指数分布などの非対称分布に至る非常に広範囲の形をとることから、人口統計、気象統計などの応用面で極めて有効なものと目されている。治水計画においても、たとえば各種継続時間における降雨量の分布がこの分布に従うことを示した報告例もある。^{1), 2)}

しかし変量相互間の相関を考慮した多変数ガンマ分布、あるいはその特別な場合としての多変数指数分布に関する研究は僅かしか見当らない。著者の知る範囲では、ガンマ型の二変数分布の誘導およびその Laguerre 多項式あるいは変形ベッセル関数による表現を試みた Kibble の研究³⁾、さらにその結果の多変量統計への拡張を試みた Krishnamoorthy, Parthasarathy^{4), 5)} の研究、わが国では気象統計の立場から二変数ガンマ分布の基本的性質を検討した井沢の論文^{6), 7)}などが注目される程度である。ところで、これらはいずれも数学的興味に基づいた研究であり、実際問題への応用という観点からするとまだきわめて不十分な段階に止まっているように思える。ここでは、今後の研究発展上必要な基礎理論のうち、従来の成果の利用できるものについてはその都度引用しつつ、理論的考察を加えていきたい。

1) 密度分布関数、周辺分布、条件付分布

一変数 ガンマ分布の密度分布関数のもっとも一般的な形はよく知られるように次式で定義される。

$$f(x) = \frac{1}{\sigma^v \Gamma(v)} (x-v)^{v-1} \exp\left(-\frac{x-v}{\sigma}\right), \quad x \geq v \quad (2 \cdot 1-1)$$

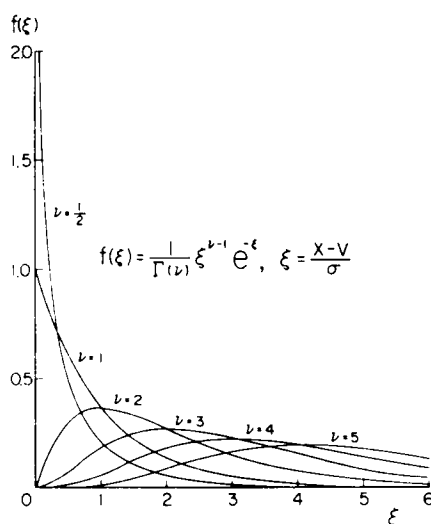
ここに ν は形状母数または指数， σ は尺度母数， v は原点母数といわれる定数である。この分布の平均値 $E(x)$ ，分散 $D^2(x)$ は，それぞれ，

$$E(x) = \sigma \nu + v \quad D^2(x) = \sigma^2 \nu \quad (2.1-2)$$

で与えられる。とくに， $\nu = 1$ の場合は指数分布となり，また $\sigma = 2$ のときは自由度 2ν の χ^2 - 分布として実用上極めて重要な分布となる。 ν の相違による形状の変化は，変数 $\xi = (x - v) / \sigma$ を用いて表わすと，図 2.1-1 のようになる。また原点母数 v については普通 0 とおいても一般性を失わないのでとくに断らない限り $v = 0$ とし議論しておく。

図 2.1-1

ガンマ分布の形状母数による相違



さて，周辺分布がそれぞれ形状母数 ν_1, ν_2 ($\nu_1 \neq \nu_2$) をもつガンマ分布である二変数 x_1, x_2 についての密度分布関数 $f(x_1, x_2)$ は井沢⁷⁾ によって，つぎのように導かれている。すなわち， $\nu_1 = n + m$ ， $\nu_2 = n$ ($m, n \geq 0$) とした密度分布は次式で与えられる。

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(n) \Gamma(m) (\sigma_1 \sigma_2)^{n-1} \sigma_1^m (1-\rho) \rho^{n-1}} \times (x_1 x_2)^{n-1} x_1^m \\ \times \exp\left\{-\frac{x_1}{\sigma_1(1-\rho)} - \frac{x_2}{\sigma_2(1-\rho)}\right\} \times \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^{m-1} \exp\left\{\frac{\rho x_1 t}{\sigma_1(1-\rho)}\right\}$$

$$\times I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2}}(1-t)\right)dt \quad (2.1-3)$$

ただし，式中の $\Gamma(\nu)$ ， $I_{\nu-1}(z)$ はそれぞれ引数 ν のガンマ関数，
($\nu-1$) 次の変形ベッセル関数であり，次式で与えられる。

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt, \quad I_\nu(z) = \sum_{t=0}^\infty \frac{z^{\nu+2t}}{2^{\nu+2t} t! \Gamma(\nu+t+1)}$$

また， ρ は相関母数であって，井沢によって指適されているように， ρ が負のときは変形ベッセル関数 $I_\nu(z)$ の z が虚数となり ν の値によっては密度分布が負や虚数になるから不適当である。したがって ρ は非負である。さらに， $\rho > 1$ ならば $I_\nu(z)$ の z が負となりこれも不適当で結局， $0 \leq \rho \leq 1$ でなければならない。(2.1-3) 式より x_1, x_2 の周辺分布 $f_1(x_1)$ ， $f_2(x_2)$ および x_2 を与えた場合の x_1 の条件付分布 $f(x_1|x_2)$ はそれぞれつぎのように導かれる。

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1) &\equiv \int_0^\infty f(x_1, x_2) dx_2 = \frac{1}{\Gamma(n+m)} \frac{1}{\sigma_1^{n+m-1}} x_1^{n+m-1} \exp\left(-\frac{x_1}{\sigma_1}\right) \\ f_2(x_2) &\equiv \int_0^\infty f(x_1, x_2) dx_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{\sigma_2^n} x_2^{n-1} \exp\left(-\frac{x_2}{\sigma_2}\right) \end{aligned} \right\} (2.1-4)$$

$$\begin{aligned} f(x_1|x_2) &\equiv \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)} = \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{1}{\sigma_1^{n-1+m} \sigma_2^{n-1} (1-\rho) \rho^{n-1}} \\ &\times \exp\left\{-\frac{x_1}{\sigma_1(1-\rho)} - \frac{\rho x_2}{\sigma_2(1-\rho)}\right\} x_1^{n-1+m} x_2^{n-1} \\ &\times \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^{m-1} \exp\left\{\frac{\rho x_1 t}{\sigma_1(1-\rho)}\right\} I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2}}(1-t)\right) dt \end{aligned} \quad (2.1-5)$$

2) 積 率

実用の便宜のために，ここではまず二変数ガンマ分布の積率を誘導してお

きたい。一般に x_1, x_2 のそれぞれの原点のまわりの p, q 次の積率 $\nu_{p,q}$ はつぎのように書ける。

$$c_1 = 1 / \left\{ \Gamma(n) \Gamma(m) (a_1 a_2)^{\frac{n+1}{2}} \sigma_1^m (1-\rho) \rho^{\frac{n+1}{2}} \right\} \quad (2 \cdot 1-6)$$

ところで，式中の x_2 に関する積分項を I_2 とおき， $\sqrt{x_2} = x$ の変換を用いると，これは次式のように積分できる。⁸⁾

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\infty (x^2)^{\frac{n-1}{2}+q} \exp(-a^2 x^2) I_{n-1}(bx) 2x dx \\
&= 2 \int_0^\infty x^{n+2q+1-1} \exp(-a^2 x^2) I_{n-1}(bx) dx \\
&= \frac{\Gamma(n+q)}{\Gamma(n)} \rho^{\frac{n-1}{2}} (1-\rho)^{q+1} \frac{\sigma_2^{\frac{n-1}{2}+q}}{\sigma_1^{\frac{n-1}{2}}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} x_1^{\frac{n-1}{2}} \\
&\quad \times {}_1F_1(n+q; n; \frac{\rho(1-t)}{\sigma_1(1-\rho)} x_1) \left. \vphantom{\frac{\rho(1-t)}{\sigma_1(1-\rho)} x_1} \right\} (2.1-7) \\
a^2 &= 1/\left\{ \sigma_1(1-\rho) \right\}, \quad b = 2\sqrt{\rho(1-t)x_1}/\sqrt{\sigma_1\sigma_2(1-\rho)}
\end{aligned}$$

ただし, ${}_1F_1$ は合流型超幾何関数で

$${}_1F_1(\alpha; r; z) = \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+t)}{\Gamma(r+t)} \frac{z^t}{t!}$$

である。したがって

$$\nu_{pq} = \frac{\Gamma(n+q)}{\{\Gamma(n)\}^2} \frac{(1-\rho)^q}{\Gamma(m)a_1^{n+m}} a_1^q \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^{m-1} \left\{ \int_0^\infty x_1^{n+m+p-1} \right. \\ \left. \exp \left\{ -\frac{1-\rho t}{a_1(1-\rho)} x_1 \right\} {}_1F_1(n+q; n; \frac{\rho(1-t)}{a_1(1-\rho)} x_1) dx_1 \right\} dt$$

となる。さらに x_1 に関する項 I_1 は積分できて ⁹⁾ つぎのようになる。

$$I_1 = \Gamma(n+m+p) \left\{ \frac{a_1(1-\rho)}{1-\rho t} \right\}^{n+m+p} F(n+q, n+m+p; n; \rho \frac{1-t}{1-\rho t})$$

したがって,

$$\nu_{pq} = \frac{\Gamma(n+m+p)}{\{\Gamma(n)\}^2} \frac{\Gamma(n+q)}{\Gamma(m)} \frac{(1-\rho)^{n+m+p+q}}{a_1^p a_2^q} \times \int_0^1 (1-t)^{n-1}$$

$$t^{m-1} (1-\rho t)^{n+m+p} F(n+q, n+m+p; n; \rho \frac{1-t}{1-\rho t}) dt$$

となる。ただし, F は超幾何関数であり,

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+t) \Gamma(b+t)}{t! \Gamma(c+t)} z^t$$

である。ここで F に関する公式により ¹⁰⁾

$$F(n+q, n+m+p; n; \rho \frac{1-t}{1-\rho t}) \\ = \left(\frac{1-\rho t}{1-\rho} \right)^{n+m+p+q} F(-m-p, -q; n; \frac{\rho(1-t)}{1-\rho t})$$

および変数変換 $(1-t)/(1-\rho t) = x$ を用いて積分する ¹¹⁾ と, 最終的に積率は次式で与えられる。

$$\nu_{pq} = \frac{\Gamma(n+m+p)}{\{\Gamma(n)\}^2} \frac{\Gamma(n+q)}{\Gamma(m)} \frac{(1-\rho)^{n+q}}{a_1^p a_2^q} \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} (1-\rho x)^{n+m+p} \\ \times F(-m-p, -q; n; \rho x) dx \quad (2 \cdot 1-8)$$

いま,

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} (1-\rho x)^{-n-m-1} G(p, q) dx &= I(p, q) \\ G(p, q) &= F(-m-p, -q; n; \rho x) \end{aligned} \right\} (2.1-9)$$

とおくと, $I(p, q)$ 内の積分は一般には困難であるが, 以下の計算に必要なのは2次までの積率であり, p, q は0, 1, 2のうちいずれかを考えればよく, $G(p, q)$ は ρx に関する2次以下のべき級数で表現できる。たとえば,

$$G(1, 0) = G(2, 0; x) = 1$$

$$G(0, 1) = 1 + \frac{m}{n} \rho x, \quad G(0, 2) = 1 + \frac{2m}{n} \rho x + \frac{m(m-1)}{n(n+1)} \rho^2 x^2$$

$$G(1, 1) = 1 + \frac{m+1}{n} \rho x$$

である。そこで公式

$$\int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} (1-\beta x)^{-\lambda-\mu-1} dx = B(\lambda, \mu) {}_2F_1(\nu, \lambda; \lambda+\mu; \beta)$$

$$[\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0, |\beta| < 1]$$

$$\text{ただし, } B(\lambda, \mu) = \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}$$

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = F(\alpha, \beta; \gamma; z)$$

を用いて, 整理すると, 結局求める二次以下の積率はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \nu_{10} &= (n+m) \sigma_1, & \nu_{01} &= n \sigma_2 \\ \nu_{20} &= (n+m)(n+m+1) \sigma_1^2, & \nu_{02} &= n(n+1) \sigma_2^2 \\ \nu_{11} &= n(n+m+\rho) \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned} \right\} (2.1-10)$$

3) 条件付平均値, 条件付分散

ここでは, x_2 を固定した場合の x_1 の条件付平均値 (回帰曲線) と条件付分散を, 特性関数を使って誘導しておく。まず (2.1-5) 式で与えられる条件付分布をもつ変量 $(x_1 | x_2)$ に対する特性関数を $Q_{x_1|x_2}(z)$ とすると,

$$\begin{aligned}
Q_{x_1|x_2}(z) &= \int_0^\infty \exp(i z x_1) f(x_1|x_2) dx_1 \\
&= C \exp \left\{ -\frac{\rho x_2}{\sigma_2(1-\rho)} \right\} x_2^{-\frac{n-1}{2}} \int_0^1 (1-t)^{\frac{n-1}{2}} t^{m-1} \left[\int_0^\infty x_1^{\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1-\rho}{\sigma_1(1-\rho)} t + i z \right\} x_1 I_{n-1} \left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\frac{x_2(1-t)}{\sigma_1 \sigma_2}} \sqrt{x_1} \right) dx_1 dt \right] \\
&\quad (2.1-11)
\end{aligned}$$

となるが, x_1 および t に関する積分は, 積分変数を

$$x = x + y, \quad t = x / (x + y)$$

と変換し, 積分公式¹²⁾

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{\frac{n-1}{2}} \exp(-Ax) I_{n-1}(a\sqrt{x_1 x}) dx \\
= 2 \frac{(i a)^{n-1}}{(2A)^n} x_2^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left(\frac{a^2 x_2}{4A}\right)
\end{aligned}$$

を用いることによって積分できてつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
Q_{x_1|x_2}(z) &= \frac{1}{(1-i\sigma_1 z)^n \left\{ 1-i\sigma_1(1-\rho) z \right\}^n} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{\rho}{\sigma_2(1-\rho)} \left\{ 1 - \frac{1}{1-i\sigma_1(1-\rho) z} \right\} \right\} \quad (2.1-12)
\end{aligned}$$

したがって, 以後 $Q_{x_1|x_2}(z)$ を単に Q と記すことにすると, 特性関数の性質によって

$$E(x_1|x_2) = i^{-1} \left[\partial Q / \partial z \right]_{z=0}$$

であるから, 求める条件付平均値 (回帰曲線) は

$$E(x_1|x_2) = (n+m)\sigma_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - n\sigma_2) \quad (2.1-13)$$

となる。したがって x_2 に対する x_1 の回帰曲線は直線となることがわかる。同様に x_1 に対する x_2 の回帰曲線も直線となり, 次式で与えられる。

$$E(x_2|x_1) = n\sigma_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left\{ x_1 - (n+m)\sigma_1 \right\} \quad (2.1-14)$$

つぎに x_2 に対する x_1 の条件付分散を求める。これには

$$E\{(x_1 | x_2)^2\} = i^{-2} [\partial^2 Q / \partial z^2]_{z=0}$$

を使って，

$$E\{(x_1 | x_2)^2\} = [m(m+1) + 2mn(1-\rho) + n(n+1)(1-\rho)^2 \\ + \frac{\rho\{(2m+n) - n\rho\}}{\sigma_2} x_2 + \frac{\rho^2 x_2^2}{\sigma_2^2}] \sigma_1^2$$

であるから，求める条件付分散を $D^2(x_1 | x_2)$ と記すと，

$$\begin{aligned} D^2(x_1 | x_2) &= E\{(x_1 | x_2) - \{E(x_1 | x_2)\}^2\} \\ &= E\{(x_1 | x_2)^2\} - \{E(x_1 | x_2)\}^2 \\ &= \left\{ m+n(1-\rho)^2 \right\} \sigma_1^2 + 2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \rho(1-\rho) x_2 \end{aligned} \quad (2.1-15)$$

となる。二変数正規分布の場合の条件付分散は，指定変数 x_2 に無関係すなわち等分散性で特徴づけられるのに対し，二変数ガンマ分布の場合の条件付分散は，上式にみられるように x_2 に關係していることが注目される。

ところで，この条件付分散の平均値を求めると

$$\begin{aligned} E\{D^2(x_1 | x_2)\} &= \int_0^\infty D^2(x_1 | x_2) f_2(x_2) dx_2 \\ &= \sigma_1^2 \{ m+n(1-\rho^2) \} \end{aligned} \quad (2.1-16)$$

となり，平均的には正規分布の場合と同じであることがわかる。

4) 分布特性値

以上によって幾つかの特性値を求めたが，ここでは，それらを一括して以下に示す。まず，

$$\left. \begin{aligned} \text{平均値} \quad m_1 &= \nu_{10} = (n+m) \sigma_1, \quad m_2 = \nu_{01} = n \sigma_2 \\ \text{分散} \quad D_1^2 &= \nu_{20} - m_1^2 = (n+m) \sigma_1^2, \quad D_2^2 = \nu_{02} - m_2^2 = n \sigma_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.1-17)$$

$$\text{相 関 係 数 } r = \frac{\mu_{11} - m_1 m_2}{Q_1 Q_2} = \sqrt{\frac{n}{n+m}} \rho$$

であり，歪度と尖度は，(2・1-9) 式において

$$G(3, 0) = G(4, 0) = 1$$

$$G(0, 3) = 1 + \frac{3m}{n} \rho x + \frac{3m(m-1)}{n(n+1)} \rho^2 x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{n(n+1)(n+2)} \rho^3 x^3$$

$$G(0, 4) = 1 + \frac{4m}{n} \rho x + \frac{6m(m-1)}{n(n+1)} \rho^2 x^2 \\ + \frac{4m(m-1)(m-2)}{n(n+1)(n+2)} \rho^3 x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \rho^4 x^4$$

であることより，

$$\nu_{30} = (n+m)(n+m+1)(n+m+2) \sigma_1^3 \quad ; \quad \nu_{03} = n(n+1)(n+2) \sigma_2^3$$

$$\nu_{40} = (n+m)(n+m+1)(n+m+2)(n+m+3) \sigma_1^4$$

$$\nu_{04} = n(n+1)(n+2)(n+3) \sigma_2^4$$

を用いて求められる。たとえば x_1 についての平均の周りの 4 次の積率は，つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \mu_{40} &= \int_0^\infty (x_1 - \bar{x}_1)^4 f_1(x_1) dx_1 \\ &= \nu_{40} - 4 \mu_{10} \nu_{30} + 6 \nu_{10}^2 \nu_{20} - 3 \nu_{10}^3 \nu_{10} \\ &= 3(n+m)(n+m+1) \sigma_1^4 \end{aligned}$$

同様にして，

$$\begin{aligned} \mu_{30} &= \nu_{30} - 3 \nu_{10} \nu_{20} + 2 \nu_{10}^2 \nu_{10} = 2(n+m) \sigma_1^3 \\ \mu_{04} &= \nu_{04} - 4 \nu_{01} \nu_{03} + 6 \nu_{01}^2 \nu_{02} - 3 \nu_{01}^3 \nu_{01} = 3n(n+1) \sigma_2^4 \\ \mu_{03} &= \nu_{03} - 3 \nu_{01} \nu_{02} + 2 \nu_{01}^2 \nu_{01} = 2n \sigma_2^3 \end{aligned}$$

したがって，歪度および尖度はそれぞれつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{歪 度} \quad r_{10} &= \frac{\mu_{30}}{\mu_{20}^{3/2}} = \frac{2(n+m)\sigma_1^2}{\{(n+m)\sigma_1^2\}^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n+m}} \\
 r_{01} &= \frac{2}{\sqrt{n}} \\
 \text{尖 度} \quad r_{20} &= \frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2} - 3 = \frac{6}{n+m} \\
 r_{02} &= \frac{6}{n}
 \end{aligned} \right\} (2.1-18)$$

ところで，上式において $n \rightarrow \infty$ とすると，漸近的に $r_{10} \rightarrow 0$ ， $r_{01} \rightarrow 0$ および $r_{20} \rightarrow 0$ ， $r_{02} \rightarrow 0$ となり， $f_1(x_1)$ および $f_2(x_2)$ はそれぞれ $N((n+m)\sigma_1, (n+m)\sigma_1^2)$ および $N(n\sigma_2, n\sigma_2^2)$ の正規分布に漸近する¹³⁾ことがわかる。

2・2 形状母数の等しい二変数ガンマ分布

ところで，実用上重要なのはそれぞれの周辺分布が同じ形，すなわち形状母数 ν_1 ， ν_2 が等しい場合である。これは以上で $m=0$ ， $n=\nu$ とすればよい。その結果はすでに井沢によって誘導されているものもあるが以後の考察の基礎となるので結果のみを記しておく。

1) 密度分布関数，周辺分布，条件付分布

$$\begin{aligned}
 \text{密度分布} \quad f(x_1, x_2) &= 1 / \left\{ \Gamma(\nu) (\sigma_1 \sigma_2)^{\frac{\nu+1}{2}} (1-\rho)^{\frac{\nu-1}{2}} \right\} \\
 &\quad \times (x_1 x_2)^{\frac{\nu-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{x_1}{\sigma_1(1-\rho)} - \frac{x_2}{\sigma_2(1-\rho)} \right\} I_{\nu-1} \left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\frac{x_1 x_2}{\sigma_1 \sigma_2}} \right)
 \end{aligned} \quad (2.2-1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{周辺分布} \quad f_1(x_1) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\sigma_1^\nu} x_1^{\nu-1} \exp \left(-\frac{x_1}{\sigma_1} \right) \\
 f_2(x_2) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\sigma_2^\nu} x_2^{\nu-1} \exp \left(-\frac{x_2}{\sigma_2} \right)
 \end{aligned} \right\} (2.2-2)$$

$$\begin{aligned} \text{条件付分布 } f(x_1|x_2) &= \frac{\sigma_2^\nu}{(\sigma_1\sigma_2)^{\nu+1} (1-\rho)} \rho^{\nu-1} (x_1/x_2)^{\nu-1} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{x_1}{\sigma_1(1-\rho)} - \frac{\rho x_2}{\sigma_2(1-\rho)} \right\} I_{\nu-1} \left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\frac{x_1 x_2}{\sigma_1 \sigma_2}} \right) \end{aligned} \quad (2.2-3)$$

2) 積 率

これは，密度分布の定義式 (2.2-1) を用いて，前と同様の誘導を行なうことによって， p, q 次の積率を与える式として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \nu_{p,q} &= \frac{\Gamma(\nu+p) \Gamma(\nu+q)}{\{\Gamma(\nu)\}^2} (1-\rho)^{\nu+q+\nu} \sigma_1^p \sigma_2^q \\ &\times F(\nu+p, \nu+q; \nu; \rho) \end{aligned} \quad (2.2-4)$$

したがって，2次以下の積率はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \nu_{10} &= \nu \sigma_1, & \nu_{01} &= \nu \sigma_2 \\ \nu_{20} &= \nu(\nu+1) \sigma_1^2, & \nu_{02} &= \nu(\nu+1) \sigma_2^2 \\ \nu_{11} &= \nu(\nu+\rho) \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.2-5)$$

3) 条件付平均値，条件付分散

条件付平均値 (回帰曲線)

$$\left. \begin{aligned} E(x_1|x_2) &= \nu \sigma_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \rho (x_2 - \nu \sigma_2) \\ E(x_2|x_1) &= \nu \sigma_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho (x_1 - \nu \sigma_1) \end{aligned} \right\} \quad (2.2-6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{条件付分散 } D^2(x_1|x_2) &= \nu \sigma_1^2 (1-\rho)^2 + 2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \rho (1-\rho) x_2 \\ \text{条件付分散の平均値} \\ \overline{D^2(x_1|x_2)} &= \int_0^\infty D^2(x_1|x_2) f(x_1|x_2) dx_2 \\ &= \nu \sigma_1^2 (1-\rho^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.2-7)$$

4) 分布特性値

$$\left. \begin{array}{ll} \text{平 均 値} & m_1 = \nu \sigma_1, \quad m_2 = \nu \sigma_2 \\ \text{分 散} & D_1^2 = \nu \sigma_1^2, \quad D_2^2 = \nu \sigma_2^2 \\ \text{相 関 係 数} & r = \rho \\ \text{歪 度} & \tau_{10} = \tau_{01} = 2/\sqrt{\nu} \\ \text{尖 度} & \tau_{20} = \tau_{02} = 6/\nu \end{array} \right\} \quad (2.2-8)$$

5) 条件付分布の最頻値およびその存在条件

相関母数の等しい二変数ガンマ分布の密度分布関数の性質を調べるために、密度分布の形を x_1, x_2 および $f = f(x_1, x_2)$ からなる三次元空間における曲面として、幾何学的に考察する。

まず、変量 x_1, x_2 を次式の規準化変量 ξ, η に変換し

$$\xi = \frac{x_1}{\sigma_1}, \quad \eta = \frac{x_2}{\sigma_2} \quad (2.2-9)$$

以後この ξ, η について議論を進める。まず、曲面 $f = f(\xi, \eta)$ を、 η を固定した場合の条件付分布 $f(\xi, \eta = \eta) = f(\xi | \eta)$ として考え、 $\eta = \eta$ 面上での最頻値とその存在条件を明らかにする。

いま $\eta = \eta$ における $f(\xi | \eta)$ の最頻値の位置を $\xi = \xi_m$ と記すと、 ξ_m は次式より求められる。

$$\left[\partial f(\xi | \eta) / \partial \xi \right]_{\xi = \xi_m} = 0 \quad (2.2-10)$$

$$\left[\partial^2 f(\xi | \eta) / \partial \xi^2 \right]_{\xi = \xi_m} < 0 \quad (2.2-11)$$

(2.2-3), (2.2-9) 式より

$$f(\xi | \eta) = C \cdot \xi^{\nu-1} \exp\left(-\frac{\xi}{1-\rho}\right) \cdot I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\xi\eta}\right)$$

$$\text{ただし, } C = (1-\rho)^{-1} \rho^{\nu-1} \eta^{\nu-1} \exp\left(-\frac{\rho\eta}{1-\rho}\right)$$

であるから、(2.2-10) 式により ξ_m は次式を満足しなければならない。

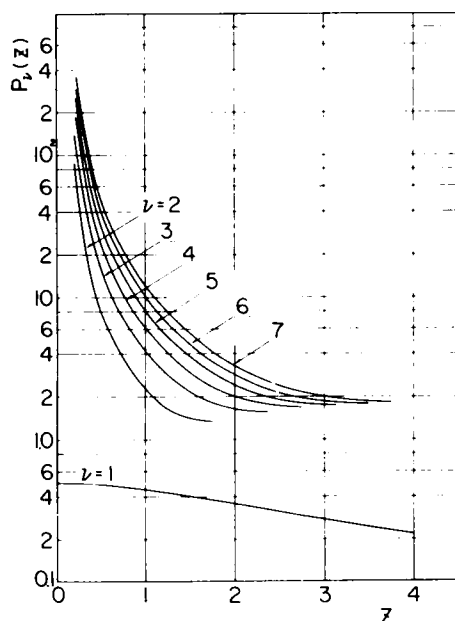
$$\frac{1-\rho}{2\rho\eta} = \frac{2(\nu-1)}{z^2} + \frac{I_\nu(z)}{z I_{\nu-1}(z)} \equiv P_\nu(z) \quad (2.2-12)$$

$$\text{ただし, } z = \frac{2\sqrt{\rho \xi_m \eta}}{1-\rho} \quad (2.2-13)$$

ところで関数 $P_\nu(z)$ は, $\nu \neq 1$ では, z に関して下に凸の関数であり, (2.2-11) 式より, その単調減少領域のみが条件を満足することがわかる。この $P_\nu(z)$ の値は図 2.2-1 のとおりである。もし ρ, η が与えられれば, (2.2-12) 式の左辺は既知となり, 図 2.2-1 より z がわかり, さらに (2.2-13) 式によって ξ_m が求められる。

図 2.2-1

$$P_\nu(z) = \frac{2(\nu-1)}{z^2} + \frac{I_\nu(z)}{z I_{\nu-1}(z)}$$



つぎに, 最頻値の存在条件を求めよう。変形ベッセル関数の性質から次式が成立つことが示される。

$$\frac{I_\nu(z)}{z I_{\nu-1}(z)} = \frac{1}{2\nu} \left\{ 1 - \frac{I_{\nu+1}(z)}{I_{\nu-1}(z)} \right\} \leq \frac{1}{2\nu}$$

ただし, 等号は $z = 0$ で成立する。したがって, 一般に $0 < \rho < 1, \nu > 0$ を考えると, (2.2-12), (2.2-13) 式から

$$\eta \geq \frac{\nu(1-\rho)}{\rho} \left\{ 1 - \frac{(1-\rho)(\nu-1)}{\xi} \right\} \quad (2.2-14)$$

となる。すなわち上式が最頻値の存在条件を与えている。

2・3 形状母数の等しいガンマ型変数の和の分布

前述の 1・2 では二変数正規分布に従う変数の線型結合和の分布を導いたが、ここでは二変数ガンマ分布の場合について述べる。形状母数 ν_1, ν_2 の異なる一般の場合については誘導は困難であるが、 $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ 、および $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ の特別の場合の和の密度分布がすでに誘導されているので、それを用いて累積分布関数を求め、その特性を調べてみよう。

すなわち、確率密度分布が (2・1-3) 式で $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ 、 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ とおいた分布に従う変量 x_1, x_2 の和 $z = x_1 + x_2$ の確率密度分布は井沢により次式のようになることが明らかにされている。⁷⁾

$$f_{\nu}(z) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\Gamma(\nu) \sigma^{\nu+1/2} (1-\rho)^{1/2} \rho^{2\nu-1/2}} \times \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1/2} \exp \left\{ -\frac{z}{\sigma(1-\rho)} \right\} I_{\nu-1/2} \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sigma(1-\rho)} z \right) \quad (2.3-1)$$

ただし、上式は ν が 0、自然数、半奇数についてのみ成立するものである。

さて、簡単のために以下 ν が自然数 n の場合について、上式を z で積分した累積分布 $F_{\nu}(z)$ の性質を調べてみよう。この場合には周知のようにガンマ関数は次式のように書ける。

$$\Gamma(n) = (n-1) !$$

さらに位数が半奇数の場合の変形ベッセル関数は、

$$I_{\nu-1/2} \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sigma(1-\rho)} z \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} z} \left[e^{\frac{z}{\sigma(1-\rho)}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+k)!}{k! (n-k)! 2^k} z^{-k} + (-1)^{n+1} e^{-\frac{z}{\sigma(1-\rho)}} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k! (n-k)! 2^k} z^{-k} \right] \quad (2.3-2)$$

と書ける。したがって、累積分布 $F(z)$ を (2・3-1) 式の積分より級数和と

して求める際には，そのうち k 項

$$\begin{aligned}
 H_k(z) &= C_k \int_0^1 z^{n-\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{\sigma(1-\rho)}} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} z^{-k} dz \\
 &+ C_{-k} \int_0^1 z^{n-\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{\sigma(1-\rho)}} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} z^{-k} dz \\
 &= C_k \int_0^1 z^{n-k-1} e^{-\left\{\frac{1}{\sigma(1-\rho)}-1\right\}z} dz \\
 &+ C_{-k} \int_0^1 z^{n-k-1} e^{-\left\{\frac{1}{\sigma(1-\rho)}+1\right\}z} dz
 \end{aligned}$$

を求める必要があるが，これは簡単に積分できて次式のようにになる。

$$\begin{aligned}
 H_k(z) &= C_k \left\{ \frac{1}{\sigma(1-\rho)} - 1 \right\}^{-n+k} \cdot \Gamma(n-k, \left\{ \frac{1}{\sigma(1-\rho)} - 1 \right\} z) \\
 &+ C_{-k} \left\{ \frac{1}{\sigma(1-\rho)} + 1 \right\}^{-n+k} \cdot \Gamma(n-k, \left\{ \frac{1}{\sigma(1-\rho)} + 1 \right\} z)
 \end{aligned} \tag{2.3-3}$$

ただし， C_k ， C_{-k} は (2.3-1)，(2.3-2) 式によって定まる k に関するつぎのような定数で，かつ $\Gamma(\nu, x)$ は γ 1 種不完全ガンマ関数である。

$$\left. \begin{aligned}
 C_k &= -\frac{1}{(n-1)! \sigma^{n+\frac{1}{2}}} \frac{1}{(1-\rho)^{1/2} \rho^{\frac{2n-1}{4}} 2^n} \frac{(-1)^k (n+k)!}{k! (n-k)! 2^k} \\
 C_{-k} &= \frac{1}{(n-1)! \sigma^{n+\frac{1}{2}}} \frac{1}{(1-\rho)^{1/2} \rho^{\frac{2n-1}{4}} 2^n} \frac{(-1)^{n+1} (n+k)!}{k! (n-k)! 2^k}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.3-4}$$

したがって，結局 $F(z)$ は n が分っていれば，次式で計算される。

$$F(z) = F_n(z) = \sum_{k=0}^n H_k(z) \tag{2.3-5}$$

つまり， ν が自然数の場合の累積分布関数は， γ 1 種不完全ガンマ関数の級数和として表現できることになる。

これらの結果を前記の正規分布の場合と比較してみると，正規分布の場合には，いわゆる再生性が成立つ（すなわち，個々の変量 x_1, x_2 と和 x_1+x_2 が同じ分布型に従う）のに対して，ガンマ分布の場合にはこのようなことは成立たないことに注目すべきである。

さらに，特別な ρ に対する極限の確率密度分布として， $\rho = 0$ および $\rho = 1$ に対する式を少し整理すると，次式のように同じ形式に表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \rho = 0, \quad f_{\nu}(z) dz &= \frac{1}{\Gamma(2\nu)} \left(\frac{z}{\sigma}\right)^{2\nu-1} e^{-\frac{z}{\sigma}} \frac{dz}{\sigma} \\ \rho = 1, \quad f_{\nu}(z) dz &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{z}{2\sigma}\right)^{\nu-1} e^{-\frac{z}{2\sigma}} \frac{dz}{2\sigma} \end{aligned} \right\} (2.3-6)$$

したがって，これに対する累積分布関数はそれぞれつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \rho = 0, \quad F_{\nu}(z) &= \frac{1}{\Gamma(2\nu)} \gamma(2\nu, \frac{z}{\sigma}) \\ \rho = 1, \quad F_{\nu}(z) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \gamma(\nu, \frac{z}{2\sigma}) \end{aligned} \right\} (2.3-7)$$

あるいは， ν が自然数 n の場合には上式はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \rho = 0, \quad F_n(z) &= 1 - e^{-\frac{z}{\sigma}} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{\sigma}\right)^k \\ \rho = 1, \quad F_n(z) &= 1 - e^{-\frac{z}{2\sigma}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{2\sigma}\right)^k \end{aligned} \right\} (2.3-8)$$

となる。たとえば $\sigma = 1$ とおき，規準化し具体的に $n = 1, 2, 3$ を与えろと，

$\rho = 0$ のとき

$$\begin{aligned} F_1(\xi) &= 1 - e^{-\xi} (1 + \xi) \\ F_2(\xi) &= 1 - e^{-\xi} \left(1 + \xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6}\right) \end{aligned}$$

$$F_3(\xi) = 1 - e^{-\frac{\xi}{2}} \left(1 + \xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^4}{24} + \frac{\xi^5}{120} \right)$$

.....

図 2・3・1

$\rho=1$ のとき

二変数ガンマ分布の和の分布

($\rho=0$ および 1 の場合)

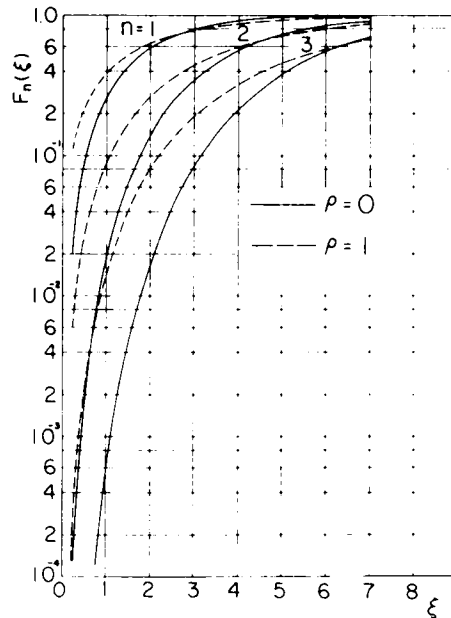
$$F_1(\xi) = 1 - e^{-\xi}$$

$$F_2(\xi) = 1 - e^{-\xi} \left(1 + \frac{\xi}{2} \right)$$

$$F_3(\xi) = 1 - e^{-\xi} \times \left(1 + \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{8} \right)$$

.....

したがって位数 n の増加に伴って $F_n(\xi)$ は次第に減少する。その変化の状態を図 2・3・1 に示す。



2・4 二変数指数分布

指数分布はガンマ分布の特別な場合であり、解析的に最も単純な形であるが、水工計画上、数日程度以下の短時間降水量、降水日間隔、無降水日間隔、積雪深などの水工計画の基本量として重要な水文量の分布によく適合するといわれている。さらに水工計画上、重要な極値分布を考えていく際の出発点としての意義も大きい。こうした観点から、最近 Gumbel らによって周辺分布が指数分布に従う特殊な二変数指数分布の研究が^{2, 3}見受けられ、その解析結果から従来のような正規分布理論に偏重した相関性の吟味や回帰分析のあり方に批判が投げられつつある。^{14), 15)} しかし、彼等がその考察の対象となっている二変数指数分布の確率理論モデルは非常に特殊なものであり、したがってその結果求められた結論も極めて限定されたものにならざるを得

ないようである。そこで，ここでは前述の二変数ガンマ分布に対する結果を適用して二変数指数分布の一般的な基礎的特性を理論的に明らかにし，さらに実用上有用な数表を提示する。

2・4・1 基礎式

二変数の指数分布の定義ないし諸特性は以上の関係式から $\nu = 1$ とおいて容易に誘導される。その結果はつぎのようになる。なお，記号はすべて前の場合と同じものを使っている。

1) 密度分布関数，周辺分布，条件付分布

$$\begin{aligned} \text{密度分布 } f(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 (1-\rho)} \exp \left\{ -\frac{x_1}{\sigma_1 (1-\rho)} - \frac{x_2}{\sigma_2 (1-\rho)} \right\} \\ &\quad \times I_0 \left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\frac{x_1 x_2}{\sigma_1 \sigma_2}} \right) \quad (2・4-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{周辺分布 } f_1(x_1) &= \frac{1}{\sigma_1} \exp \left(-\frac{x_1}{\sigma_1} \right), \quad f_2(x_2) = \frac{1}{\sigma_2} \exp \left(-\frac{x_2}{\sigma_2} \right) \\ &\quad (2・4-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{条件付分布 } f(x_1|x_2) &= \frac{1}{\sigma_1 (1-\rho)} \exp \left\{ -\frac{x_1}{\sigma_1 (1-\rho)} - \frac{\rho x_2}{\sigma_2 (1-\rho)} \right\} \\ &\quad \times I_0 \left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\frac{x_1 x_2}{\sigma_1 \sigma_2}} \right) \quad (2・4-3) \end{aligned}$$

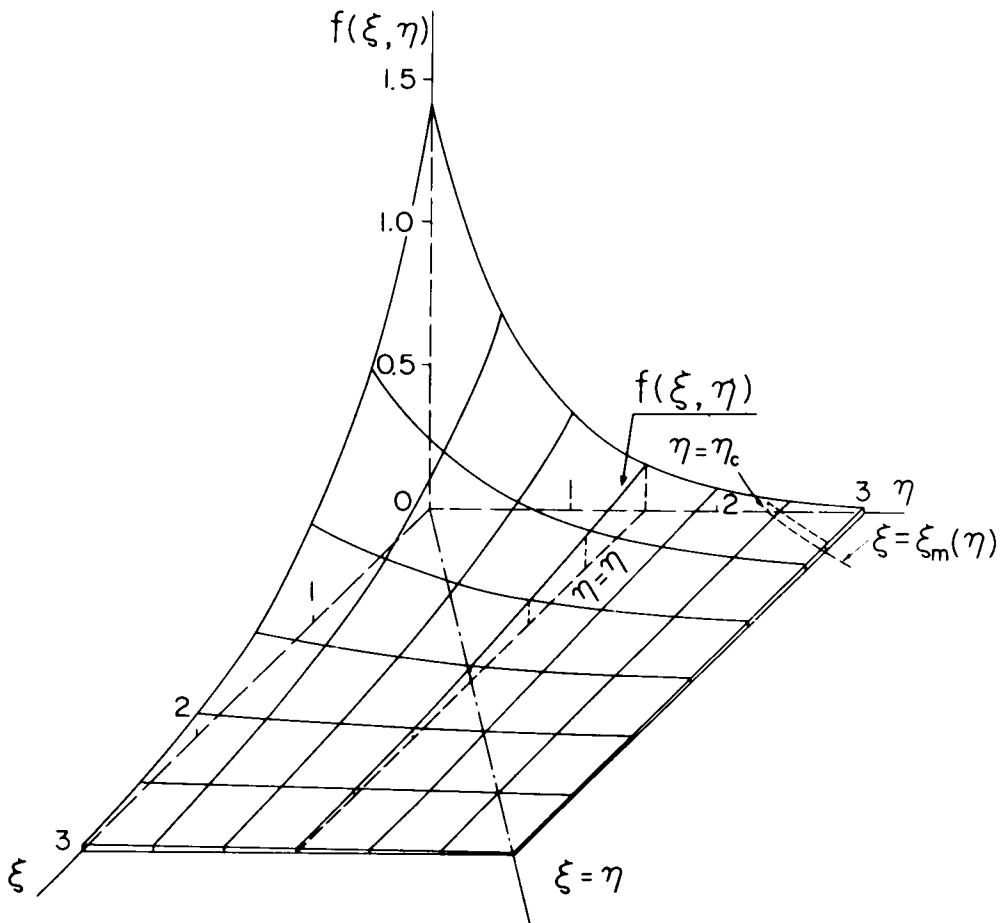
二変数指数分布の (2・4-1) 式で定義される密度分布曲面を概括的に理解するために， $\rho = 0.3$ としたときの密度分布の例を図 2・4-1 に示す。この曲面で η を固定した場合の分布曲線を $f = f(\xi, \eta)$ として調べてみると，まず $\eta = 0$ では，

$$f(\xi, 0) = \frac{1}{1-\rho} \exp \left(-\frac{\xi}{1-\rho} \right)$$

図 2・4-1

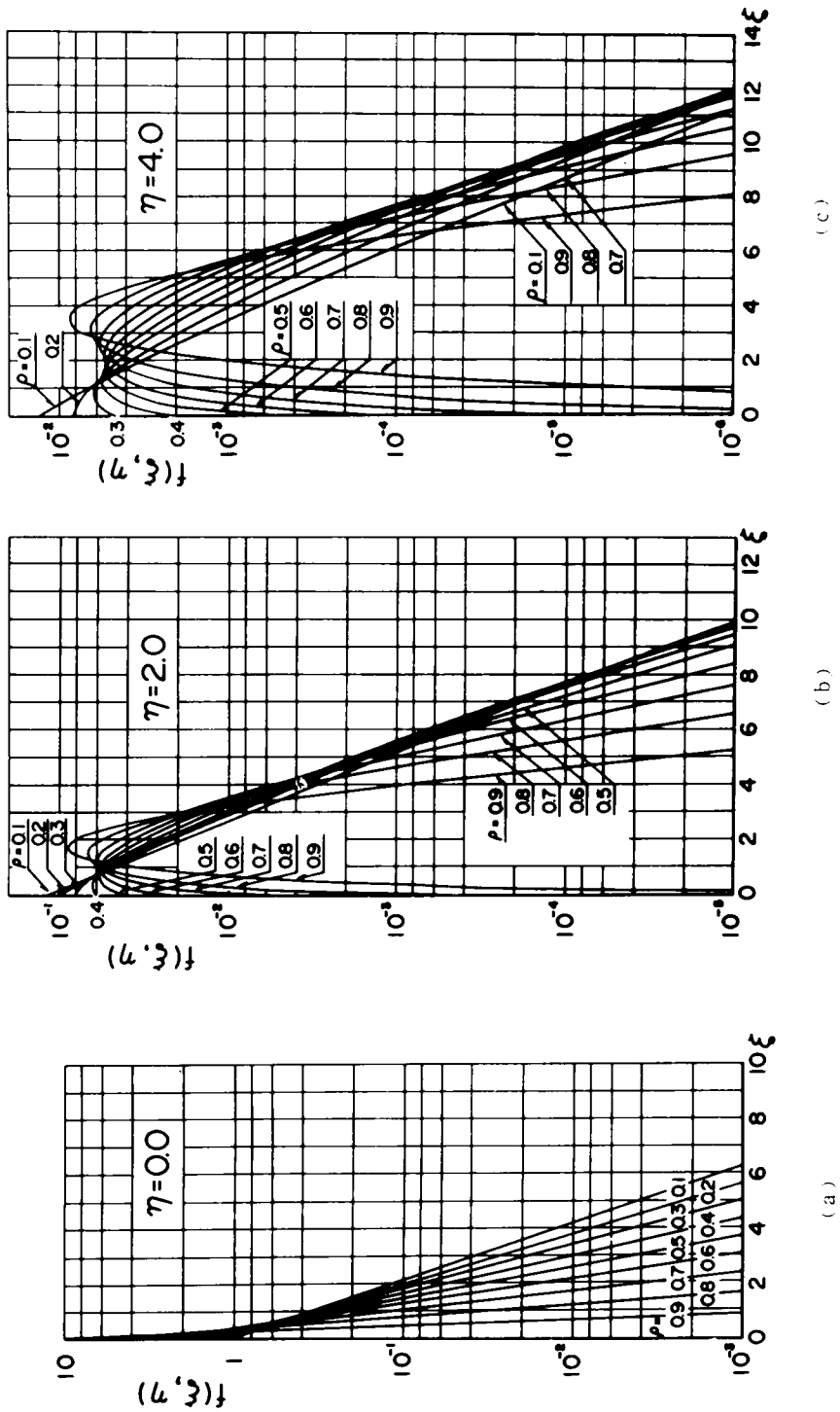
二変数指数分布の密度分布曲面

($\rho = 0.3$)



となるから， ξ が増すにつれて $f(\xi, \eta)$ は指数関数的に減少する。つぎに， η が増すにつれて， $f(\xi, \eta)$ の減少は指数関数の低減より鈍くなり，ついに，ある限界 $\eta = \eta_c$ から最頻値が現われてくるが，図では縦距が小さく判り難いので，これを $\eta = \eta_c$ で切断した断面における分布曲線として図 2・4-2 (a)，(b)，(c) に示す。

図 2・4-2 (a) (b) (c) 二変数指数分布の密度分布関数



これらの図よりつぎのような傾向が認められる。

I) $\eta = 0$ で ξ の増加に伴い $f(\xi, \eta)$ は指数関数的なてい減をするのに対して、 η が増加するにつれて最頻値が出現する。この最頻値は、 ρ が大きいほど小さな η から現われてくる。

II) 最頻値の位置は、 ρ が大きくなるにつれて、あるいは、 η が大きくなるにつれて、 ξ の正の方向に移動する。

III) 最頻値の近傍の尖りは、 ρ が小さいほど、また η が大きいほど小さい。

なお、最頻値の位置および存在条件は後の 5) で述べる。

2) 積 率

$$\nu_{p,q} = p! q! (1-\rho)^{p+q+1} \sigma_1^p \sigma_2^q F(p+1, q+1; 1; \rho) \quad (2.4-4)$$

したがって、2 次以下の積率はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \nu_{10} &= \sigma_1 & , & & \nu_{01} &= \sigma_2 \\ \nu_{20} &= 2 \sigma_1^2 & , & & \nu_{02} &= 2 \sigma_2^2 \\ \nu_{11} &= (1+\rho) \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4-5)$$

3) 条件付平均値, 条件付分散

条件付平均値

$$\left. \begin{aligned} E(x_1 | x_2) &= \sigma_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - \sigma_2) \\ E(x_2 | x_1) &= \sigma_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \sigma_1) \end{aligned} \right\} \quad (2.4-6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{条件付分布} \quad D^2(x_1 | x_2) &= \sigma_1^2 (1-\rho)^2 + 2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \rho (1-\rho) x_2 \\ \text{条件付分散の平均値} \quad \overline{D^2(x_1 | x_2)} &= \sigma_1^2 (1-\rho^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.4-7)$$

4) 分布特性値

$$\left. \begin{aligned} \text{平 均 値} \quad m_1 &= \sigma_1 & , & & m_2 &= \sigma_2 \\ \text{分 散} \quad D_1^2 &= \sigma_1^2 & , & & D_2^2 &= \sigma_2^2 \end{aligned} \right\}$$

相 関 係 数 $r = \rho$

歪 度 $r_{10} = r_{01} = 2$

尖 度 $r_{20} = r_{02} = 6$

(2.4-8)

5) 条件付分布の最頻値およびその発生条件

η を固定した場合の ξ の条件付分布 $f(\xi | \eta)$ の最頻値の位置 ξ は, 次式を満足する ξ_m として求められる。

$$\frac{1-\rho}{2\rho\eta} = \frac{I_1(z)}{z I_0(z)} \equiv P_1(z) \quad , \quad z = \frac{2\sqrt{\rho\xi_m\eta}}{1-\rho} \quad (2.4-9)$$

さらにこのような最頻値の存在条件として

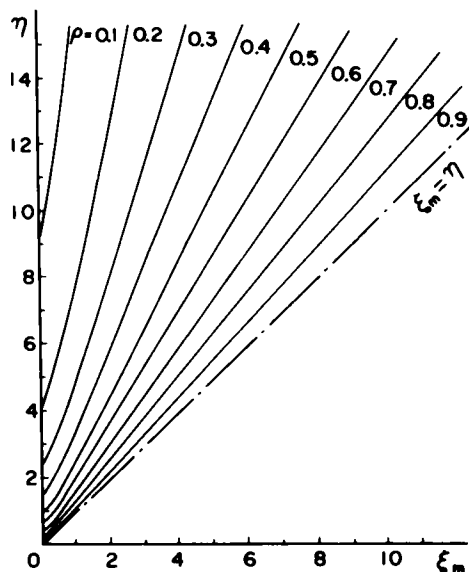
$$\eta \geq \frac{1-\rho}{\rho} \equiv \eta_c \quad (2.4-10)$$

である。ただし等号は $z = 0$ で成立する。

以上の諸式を用いて, η を固定した場合の ξ の最頻値の位置 ξ_m を, ρ の種々の値について示すと, 図 2.4-3 のようになる。

図 2.4-3

条件付分布における最頻値
の位置



これより ρ が小さければ, η がかなり大きな値をとらない限り最頻値は出現しないが, ρ が大きくなると η の小さい値からでも出現してくる様子が諒解されよう。また, η が大きくなるにつれて, 同一の ρ に対する曲線 $\xi_m = \xi_m(\eta)$ は漸近的にある直線に近づくことが予想される。この漸近線は以下のようにして求められる。

まず, $z \rightarrow \infty$ のときの $I_1(z)$ の漸近展開

$$I_1(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 - \frac{4\nu^2 - 1^2}{1! (8z)} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2! (8z)^2} \dots \right\}$$

を用いると, $I_1(z) / I_0(z)$ は, z のべき級数で展開されて,

$$\frac{I_1(z)}{I_0(z)} \doteq 1 - \frac{0.5}{z} - \frac{0.125}{z^2} - \dots$$

となる。これを (2.4-9) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{\eta} &\doteq \frac{2\rho}{1-\rho} z \left(1 - \frac{0.5}{z} - \frac{0.125}{z^2} - \dots \right) \\ &= \frac{2\rho}{1-\rho} \left\{ \left(z - \frac{1}{2} \right) - O\left(\frac{1}{z}\right) \right\} \end{aligned}$$

となるが, $O(1/z) \ll (z - 1/2)$ および $1/2 \ll z$ を仮定することによって, 上式は次式のように書ける。

$$\xi_m \doteq \rho\eta - \frac{1-\rho}{4} \quad \text{または} \quad \eta \doteq \frac{1}{\rho} \xi_m + \frac{1-\rho}{4\rho}$$

これが求める漸近線の方程式である。

2.4.2 条件付非超過確率

二変数指数分布の理論を使った実用計算の便宜を考えて, ここでは条件付非超過確率を定義しておく。規準化変量 ξ , η を用いると, これは (2.4-3) より次式のように表わせる。

$$\begin{aligned} F(\xi | \eta) &= \int_0^\xi f(\xi | \eta) d\xi \\ &= \frac{1}{1-\rho} \exp\left(-\frac{\rho\eta}{1-\rho}\right) \int_0^\xi \exp\left(-\frac{\xi}{1-\rho}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\xi\eta}\right) d\xi \end{aligned} \quad (2.4-11)$$

当然，上式の $F = F(\xi | \eta)$ は ξ , η のみでなく ρ にも依存する。そこで著者は実用を考えて二種の数表を作成した。

その一つは， ξ , η および ρ を与えて F を求めるものである。すなわち， ρ の 0.1 (0.1) 0.9 の値に対する F の値として， ξ に関しては 0.05 (0.05) 0.25 (0.25) 10 (0.5) 14 (1) 18, η に関しては 0 (0.25) 3.00 (0.5) 5 (1) 10 (2) 18 を数表にまとめたもので，論文末に表 1・1~1・9として示されているものである。この数表で，たとえば 24 25 35 という数値は $242535 \times 10^{-6} = 0.242535$ を意味する。この計算は，必要に応じて ξ を最小 0.005 きざみごとに $f(\xi | \eta)$ を計算し Newton-Cotes の数値積分公式により KDC-II を利用して行なった。¹⁶⁾

その後，シミュレーション計算などの便宜を考え，これを ρ , F および η を与えて ξ を求めるように再整理したのが論文末の表 2・1 ~ 2・9 である。すなわち，当初の数表に対して，さらに必要に応じて ξ を最小 0.0005 きざみまで補足して求めた $F(\xi | \eta)$ の値に対して Lagrange 補間公式を用い京大大型計算機で計算した。¹⁷⁾ ρ の 0.1 (0.1) 0.9 の値に対する ξ の値を， F に関して 0.001 (0.001) 0.01 (0.01) 0.20 (0.05) 0.80 (0.01) 0.99 (0.001) 0.999 , η に関して 0 (0.25) 3.00 (0.5) 5 (1) 10 (2) 18 で示したものである。なお，数表でたとえば，0.9005-3 は 0.9005×10^{-3} を意味する。

この数表の利用方法としてシミュレーション手法については才 2 編で詳述することにし，ここでは二変数指数分布の場合の任意領域 D に (x, y) なる点が含まれる確率の計算を考えよう。 D を規準化座標 (ξ, η) で表わすと， (ξ, η) が D に含まれる確率 $P(D)$ は

$$P(D) = \iint_D f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{\eta_l}^{\eta_u} f(\eta) \left\{ \int_{\xi_{il}}^{\xi_{iu}} f(\xi | \eta) d\xi \right\} d\eta$$

の形で表現できる。ここに η_l, η_u は η の変域を表わし， ξ_{il}, ξ_{iu} は ξ 軸に平行な直線で領域 D を分割したとき i 番目の要素の下限，上限を意味する。具体的には上式はつぎの形式で表わせる。

$$P(D) = \sum_{i=1}^n e^{-\eta_i} \{ F(\xi_{iu} | \eta_i) - F(\xi_{il} | \eta_i) \} \Delta \eta_i$$

ここに $\Delta\eta$ は分割領域の間隔， η は分割数である。F ($\xi \mid \eta$) は表に示されているからこの計算は容易に実行できる。

2・4・3 和の分布

2・3の二変数ガンマ分布の和の分布に対する結果において， $\nu = 1$ とおけば二変数指数分布に対する結果は容易に求められる。

まず確率密度分布 $f(z)$ は (2・3-1) 式により

$$f(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma^{3/2} (1-\rho)^{1/2} \rho^{1/4}} \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{z}{\sigma(1-\rho)}\right\} I_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sigma(1-\rho)} z\right)$$

となるが，(2・3-2) 式を用いることによって，次式のように簡単になる。

$$f(z) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\rho}} \left[\exp\left\{-\frac{z}{\sigma(1+\sqrt{\rho})}\right\} - \exp\left\{-\frac{z}{\sigma(1-\sqrt{\rho})}\right\} \right] \quad (2.4-12)$$

したがって，累積分布関数 $F(z)$ は，次式のようになる。

$$F(z) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left[(1 + \sqrt{\rho}) \exp\left\{-\frac{z}{\sigma(1+\sqrt{\rho})}\right\} - (1 - \sqrt{\rho}) \exp\left\{-\frac{z}{\sigma(1-\sqrt{\rho})}\right\} \right] \quad (2.4-13)$$

この $F(z)$ の計算は容易であり， $\sigma = 1$ において規準化した場合の $\rho = 0.1$ (0.1) 0.9 および $z = 0$ (0.25) 1.00 (0.5) 7.0 に対する数値を表 2・4-1 に示しておく。また，概略の ρ による変化の様子は，図 2・4-4 に示されている。ただし，図中の u は，二変数正規変量の和の分布と比較するために，規準化変量 θ に正規変量の場合と同じ型式，すなわち

$$\theta = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{x}{\sigma} - 1$$

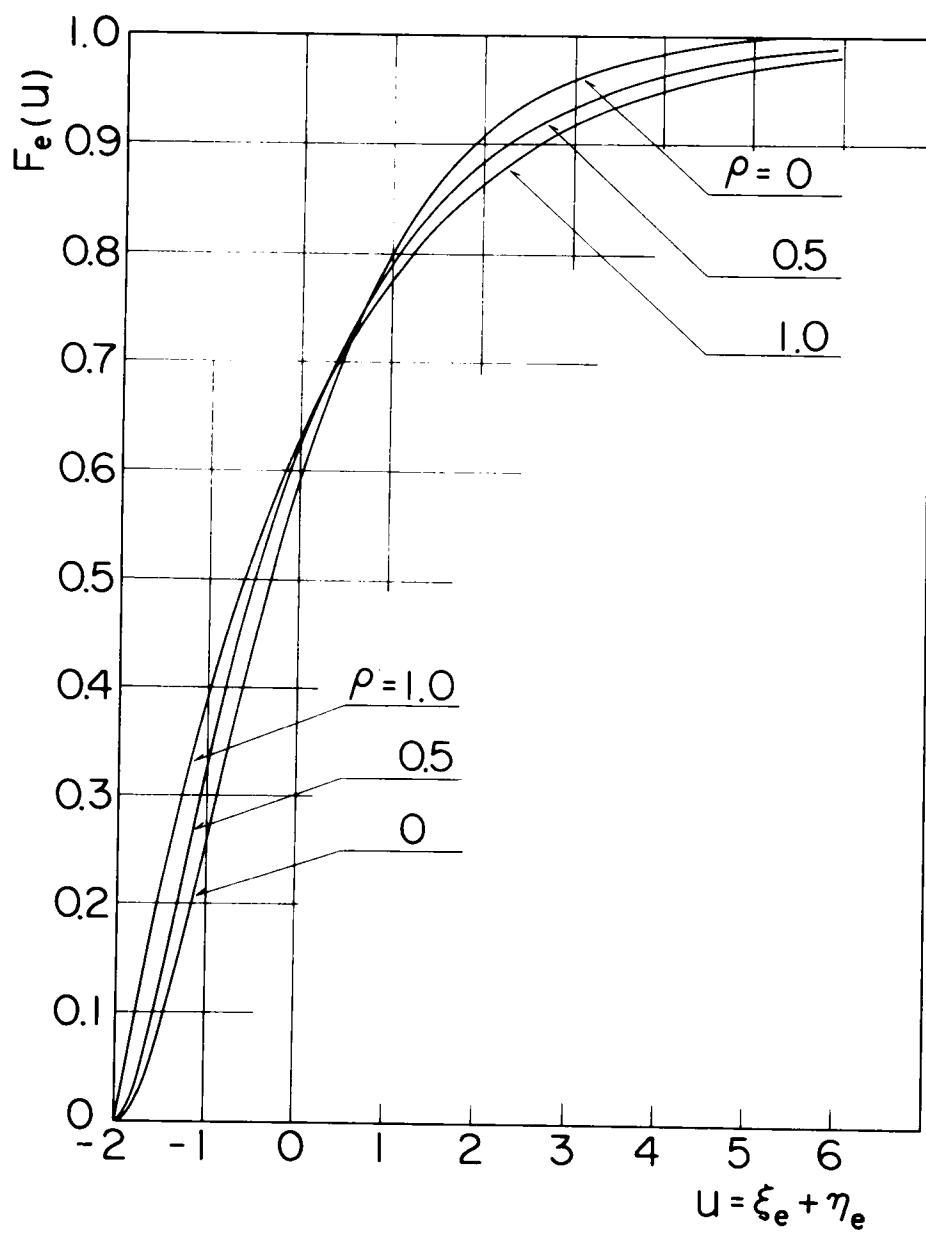
を用いた場合の二つの規準化変量の和で， z と u との関係は $u = z - 2$ である。

表 2・4-1 二変数指数分布における和の分布

$$F(z) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left[(1 + \sqrt{\rho}) e^{-\frac{z}{\sqrt{\rho}}} - (1 - \sqrt{\rho}) e^{-\frac{z}{\sqrt{\rho}}} \right]$$

$z \backslash \rho$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.25	0.027	0.029	0.032	0.035	0.040	0.046	0.053	0.063	0.077	0.097	0.118
0.50	0.090	0.097	0.105	0.114	0.124	0.137	0.152	0.169	0.187	0.205	0.221
0.75	0.173	0.184	0.196	0.208	0.223	0.238	0.255	0.271	0.287	0.301	0.313
1.00	0.264	0.277	0.291	0.305	0.320	0.335	0.350	0.364	0.375	0.385	0.394
1.5	0.442	0.455	0.467	0.479	0.490	0.500	0.508	0.515	0.520	0.524	0.528
2.0	0.594	0.603	0.610	0.617	0.622	0.626	0.629	0.631	0.632	0.632	0.632
2.5	0.713	0.717	0.719	0.721	0.721	0.721	0.720	0.719	0.717	0.715	0.714
3.0	0.801	0.801	0.799	0.797	0.795	0.792	0.789	0.786	0.793	0.780	0.777
3.5	0.864	0.861	0.857	0.853	0.849	0.845	0.841	0.837	0.833	0.830	0.826
4.0	0.908	0.904	0.899	0.894	0.889	0.884	0.880	0.876	0.872	0.868	0.865
4.5	0.939	0.933	0.928	0.923	0.918	0.914	0.909	0.905	0.902	0.898	0.895
5.0	0.960	0.954	0.949	0.944	0.940	0.935	0.932	0.928	0.924	0.921	0.918
5.5	0.973	0.969	0.964	0.960	0.956	0.952	0.948	0.945	0.942	0.939	0.936
6.0	0.983	0.978	0.973	0.971	0.967	0.964	0.961	0.958	0.955	0.953	0.950
6.5	0.989	0.985	0.982	0.979	0.976	0.973	0.971	0.968	0.966	0.963	0.961
7.0	0.997	0.990	0.987	0.985	0.982	0.980	0.978	0.976	0.974	0.972	0.970

図 2・4-4 二変数指数分布における標準化変量の
和の非超過確率



参 考 文 献

- 1) 岡本雅典, 鈴木栄一; 降水量の分布とその正規化に関する 2, 3 の問題, 気象と統計, 才 6 卷, pp.49-51
- 2) 小林康江, 石部幽香子; 雨量の度数の分布について, 気象と統計, 才 8 卷, 才 3, 4 号, pp.51-53
- 3) W.F.Kibble; A two-variate Gamma type distribution, SANKHYA (The Indian Journal of Statistics), vol.5, 1941, pp.137-150
- 4) A.S. Krishnamoorthy and M.Parthasathy; A multivariate Gamma-type distribution, Annal of Mathematical Statistics, vol.22, 1951, pp.549-557
- 5) A.S. Krishnamoorthy and M. Parthasathy; Correction to "A multivariate Gamma-type distribution", vol.31, 1960, pp.229
- 6) 井沢龍夫; 二変数の Γ -分布について (降水量の分布才 2 報), 気象と統計, 才 4 卷, 才 1 号, pp.9-15
- 7) 井沢龍夫; 二変数の Γ -分布について (続), 気象と統計, 才 4 卷, 才 2 号, pp.15-19
- 8) たとえば, 森口繁一他; 数学公式Ⅲ, 一特殊関数一, 岩波全書, p.200
- 9) I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of integrals, series, and products, Academic Press, New York and London, 1965, p 860
- 10) たとえば前出の p.1243
- 11) 前出 9) の p.286
- 12) 前出 9) の p.717
- 13) たとえば, 宇野利雄; 数理統計学演習, 共立全書, p.85
- 14) E.J. Gumbel; Bivariate exponential distributions, Journal of the American Statistical Association, vol.55 1960, pp.698-707

15) J.E. Freund; A bivariate extension of the exponential distribution, journal of the American Statistical association, vol.56, 1961, pp.971-977

16) 長尾正志, 角屋睦; 二変数ガンマ分布とその適用に関する研究 (1)
—— 二変数指数分布の基礎理論 ——, 京大防災研究所年報才 13号B,
昭和45年3月, pp.105-133

17) M. Nagao and M. Kadoya; Two-variate exponential distribution and its numerical table for engineering application, Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto Univ., vol.20, March 1971, pp.183-215

第 3 章 二変数分布の母数推定に関する理論的研究

3・1 概 説

以上二変数正規分布, 二変数ガンマ分布およびその特別な場合に相当する二変数指数分布の基礎理論について考察を進めてきたが, この章では, これらの分布を実際使用するには, 定義中に含まれる未知の母数を推定しなければならない。ところで二変数正規分布の推定についてはかなり研究が行なわれてはいるが, 二変数ガンマ分布の推定については現在ほとんど研究されておらず, 僅かに井沢が指数分布に関する最尤解を導いているに過ぎない。そこで, ここでは全標本による母数推定および上位の部分標本による母数推定について理論的に考察した結果について述べる。なお, 二変数正規分布に対して全標本による推定は周知のことであるのでここでは述べない。

3・2 全標本による母数推定

3・2・1 二変数ガンマ分布における母数推定

1) 形状母数の異なる二変数ガンマ分布

この場合，現在のところ最尤解は求め難いので，ここでは積率解のみについて述べる。

基礎式 (2・1-3) 式から出発して得られている分布特性値の関係式 (2・1-17) 式を利用する。まず (2・1-3) 式で表わされる母集団分布から N 組の標本 $(x_{1i}, x_{2i}) (i=1, 2, \dots, N)$ を取出し，これより算出される一次および二次の積率に関して次式が成立つ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{1i} &\equiv \bar{x}_1 = \nu_1 \sigma_1, & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{2i} &\equiv \bar{x}_2 = \nu_2 \sigma_2 \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 &\equiv \overline{x_1^2} = \nu_1 (\nu_1 + 1) \sigma_1^2, & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{2i}^2 &\equiv \overline{x_2^2} = \nu_2 (\nu_2 + 1) \sigma_2^2 \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{1i} x_{2i} &\equiv \overline{x_1 x_2} = \nu_2 (\nu_1 + \rho) \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned}$$

したがって，積率解は上記の諸式よりつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\nu}_1 &= \frac{(\bar{x}_1)^2}{\overline{x_1^2} - (\bar{x}_1)^2}, & \hat{\nu}_2 &= \frac{(\bar{x}_2)^2}{\overline{x_2^2} - (\bar{x}_2)^2} \\ \hat{\sigma}_1 &= \frac{\overline{x_1^2} - (\bar{x}_1)^2}{\bar{x}_1}, & \hat{\sigma}_2 &= \frac{\overline{x_2^2} - (\bar{x}_2)^2}{\bar{x}_2} \\ \hat{\rho} &= \frac{\bar{x}_1 \{ \overline{x_1 x_2} - \bar{x}_1 \bar{x}_2 \}}{\bar{x}_2 \{ \overline{x_1^2} - (\bar{x}_1)^2 \}} = \sqrt{\frac{\hat{\nu}_1}{\hat{\nu}_2}} r \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 2-1)$$

ただし， ν_1, ν_2 はそれぞれ x_1, x_2 の周辺分布の形状母数， r は標本相関係数である。

また，形状母数 ν_1, ν_2 が既知の場合には (3・2-1) 式は以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{\overline{x_1}}{\nu_1} \quad , \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{\overline{x_2}}{\nu_2} \\
 \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{\overline{x_1^2}}{\nu_1 (\nu_1 + 1)} \quad , \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{\overline{x_2^2}}{\nu_2 (\nu_2 + 1)} \\
 \hat{\rho} &= \nu_1 \frac{\overline{x_1 x_2}}{\overline{x_1} \overline{x_2}} - \nu_1 = \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}} r
 \end{aligned} \right\} (3.2-2)$$

2) 形状母数の等しい二変数ガンマ分布

a. 積率解

(3.2-1) 式より積率解はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{\nu} &= \frac{(\overline{x_1})^2}{\overline{x_1^2} - (\overline{x_1})^2} = \frac{(\overline{x_2})^2}{\overline{x_2^2} - (\overline{x_2})^2} \\
 \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{\overline{x_1^2} - (\overline{x_1})^2}{\overline{x_1}} \quad , \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{\overline{x_2^2} - (\overline{x_2})^2}{\overline{x_2}} \\
 \hat{\rho} &= \frac{\overline{x_1 x_2} - \overline{x_1} \overline{x_2}}{\sqrt{\overline{x_1^2} - (\overline{x_1})^2} \sqrt{\overline{x_2^2} - (\overline{x_2})^2}} = r
 \end{aligned} \right\} (3.2-3)$$

なお，形状母数 ν を既知とする場合には上式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{\overline{x_1}}{\nu} \quad , \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{\overline{x_2}}{\nu} \\
 \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{\overline{x_1^2}}{\nu (\nu + 1)} \quad , \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{\overline{x_2^2}}{\nu (\nu + 1)} \\
 \hat{\rho} &= \nu \frac{\overline{x_1 x_2}}{\overline{x_1} \overline{x_2}} - \nu = r
 \end{aligned} \right\} (3.2-4)$$

b. 最尤解

一般の場合の解は誘導が困難であるので，分布の形状母数 ν を既知とした場合について考える。まず，母集団から n 組の標本 $(x_{1i}, x_{2i}) (i=1, 2$

....., n) を取出したとき, その尤度すなわち同時分布 P_n は次式のようになる。

$$P_n = \frac{1}{\left\{ \Gamma(\nu) (\sigma_1 \sigma_2)^{\frac{\nu-1}{2}} (1-\rho)^{\frac{\nu-1}{2}} \right\}^n} \prod_{i=1}^n (x_{1i} x_{2i})^{\frac{\nu-1}{2}} \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_1 (1-\rho)} \sum_{i=1}^n x_{1i} - \frac{1}{\sigma_2 (1-\rho)} \sum_{i=1}^n x_{2i} \right\} \times \prod_{i=1}^n I_{\nu-1} \left(\frac{2\sqrt{\rho x_{1i} x_{2i}}}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} (1-\rho)} \right) \quad (3 \cdot 2-5)$$

これより

$$\frac{\partial (\log P_n)}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial (\log P_n)}{\partial \sigma_2} = \frac{\partial (\log P_n)}{\partial \rho} = 0$$

を連立して解けばよい。その際, 微分

$$I_\nu'(z) = \frac{1}{2} \{ I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) \}$$

を用い, かつ

$$z_i = \frac{2}{1-\rho} \sqrt{\rho \frac{x_{1i} x_{2i}}{\sigma_1 \sigma_2}}$$

とおくと, つぎのようになる。

$$-\frac{n(\nu+1)}{2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i}}{(1-\rho)\sigma_1} - \frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sum_{i=1}^n \frac{I_{\nu-2}(z_i) + I_\nu(z_i)}{2I_{\nu-1}(z_i)} \sqrt{\frac{x_{1i} x_{2i}}{\sigma_1 \sigma_2}} = 0 \quad (3 \cdot 2-6)$$

$$-\frac{n(\nu+1)}{2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_{2i}}{(1-\rho)\sigma_2} - \frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sum_{i=1}^n \frac{I_{\nu-2}(z_i) + I_\nu(z_i)}{2I_{\nu-1}(z_i)} \sqrt{\frac{x_{1i} x_{2i}}{\sigma_1 \sigma_2}} = 0 \quad (3 \cdot 2-7)$$

$$\frac{n}{1-\rho} - \frac{n(\nu-1)}{2\rho} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i}}{(1-\rho)^2 \sigma_1} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{2i}}{(1-\rho)^2 \sigma_2} \\ + \frac{1+\rho}{\sqrt{\rho} (1-\rho)^2} \sum_{i=1}^n \frac{I_{\nu-2}(z_i) + I_\nu(z_i)}{2I_{\nu-1}(z_i)} \sqrt{\frac{x_{1i} x_{2i}}{\sigma_1 \sigma_2}} = 0 \quad (3 \cdot 2-8)$$

(3.2-6) から (3.2-7) 式を差引くと，

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_{1i}}{\sigma_1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{2i}}{\sigma_2} \quad (3.2-9)$$

したがって，(3.2-6)，(3.2-8)，および (3.2-9) 式より σ_2 および ρ を消去すると， σ_1 に関する最尤解は

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{1}{n \nu} \sum_{i=1}^n x_{1i} = \frac{\overline{x_1}}{\nu} \quad (3.2-10)$$

さらにこれを (3.2-9) 式に用いると， σ_2 に関する最尤解は次式となる。

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{1}{n \nu} \sum_{i=1}^n x_{2i} = \frac{\overline{x_2}}{\nu} \quad (3.2-11)$$

つぎに，(3.2-10) 式を (3.2-6) 式に代入し，漸化式

$$\frac{2\nu}{z} I_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z)$$

を利用して整理すると， ρ に関する最尤解として次式が得られる。

$$\nu \sqrt{\hat{\rho}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{I_\nu \left(\frac{2\sqrt{\hat{\rho}} \xi_i \eta_i}{1-\hat{\rho}} \right)}{I_{\nu-1} \left(\frac{2\sqrt{\hat{\rho}} \xi_i \eta_i}{1-\hat{\rho}} \right)} \sqrt{\xi_i \eta_i} \quad (3.2-12)$$

ただし，

$$\xi_i = \frac{x_{1i}}{\hat{\sigma}_1}, \quad \eta_i = \frac{x_{2i}}{\hat{\sigma}_2} \quad (3.3-13)$$

すなわち， ξ ， η は規準化変量である。

さて，以上の結果をみると，結局，尺度母数 σ_1 ， σ_2 は簡単に平均値から推定できるが，相関に関する母数 ρ は (3.2-12) 式に陰に含まれるから試算的に求めざるを得ず，扱いやすい形とはいえない。

さらに， ν が既知の場合の積率解と比べてみると，尺度母数 σ については最尤解と積率解が完全に一致すること，および相関に関する母数 ρ の積率解が通常定義による標本相関係数と一致するのに対し，最尤解では一般に一致しないことが明らかにされたわけである。

ところで，上式から試算的に ρ を求めるにはつぎのようにすればよい。

すなわち，新たに変数 z_i を

$$z_i = \frac{2\sqrt{\hat{\rho}}}{1-\hat{\rho}} \sqrt{\xi_i \eta_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.2-14)$$

と定義し，それから作られるつぎのような関数 $K_\nu(z_i)$

$$K_\nu(z_i) \equiv \frac{I_\nu(z_i)}{\nu I_{\nu-1}(z_i)} \quad z_i = K_\nu(\hat{\rho}; \xi_i, \eta_i) \quad (3.2-15)$$

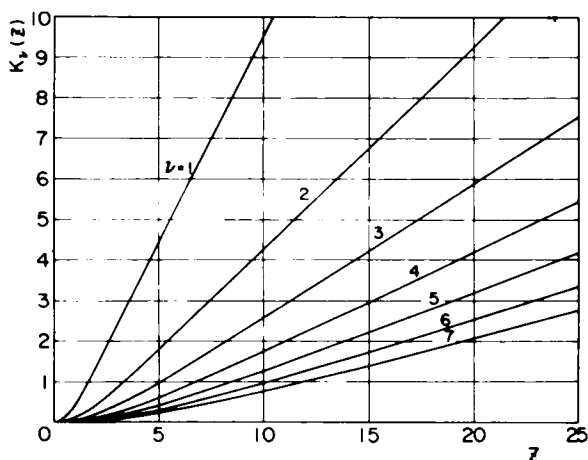
を用いると，(3.2-12) 式はつぎのように書ける。

$$\frac{2\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_\nu(z_i) \quad (3.2-16)$$

したがって，図 3・2-1 のようにあらかじめ z と $K_\nu(z)$ の関係を求めておけば適当に ρ を仮定することによって z_i を求め，この z_i に対して (3.2-16) 式が満足されるように ρ を修正していけばよい。

図 3・2-1

$$K_\nu(z) = \frac{z I_\nu(z)}{\nu I_{\nu-1}(z)}$$



なお ρ の 1 次近似としてすでに得られている積率解を使えば好都合であるが，標本の誤差などを考慮すると，このような労力の要する試算によって厳密な最尤解を求めることの価値に疑義がないわけではない。実際の試算には前述の積率解を使っても十分でないと思われる。

3・2・2 二変数指数分布における母数推定

a. 積率解

二変数ガンマ分布で ν が既知で1の場合の積率解(3・2-4)式を用いるか,あるいは積率の誘導結果(2・2-5)式を用いると,積率解はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_1 &= \overline{x_1} \quad , \quad \hat{\sigma}_2 = \overline{x_2} \\ \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{2} \overline{x_1^2} \quad , \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2} \overline{x_2^2} \\ \rho &= \frac{\overline{x_1 x_2}}{\overline{x_1} \overline{x_2}} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.2-17)$$

b. 最尤解

(3・2-10), (3・2-11), (3・2-12)式から次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_1 &= \overline{x_1} \quad , \quad \hat{\sigma}_2 = \overline{x_2} \\ \sqrt{\hat{\rho}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{I_1 \left(\frac{2\sqrt{\hat{\rho}} \xi_i \eta_i}{1 - \hat{\rho}} \right)}{I_0 \left(\frac{2\sqrt{\hat{\rho}} \xi_i \eta_i}{1 - \hat{\rho}} \right)} \sqrt{\xi_i \eta_i} \end{aligned} \right\} \quad (3.2-18)$$

ただし,

$$\xi_i = \frac{x_{1i}}{\hat{\sigma}_1} \quad , \quad \eta_i = \frac{x_{2i}}{\hat{\sigma}_2} \quad (3.2-19)$$

3・3 部分標本による母数推定

3・3・1 部分標本の選び方

以上は母集団から標本が何の制限もなく抽出できた場合の推定法であったが,実際にはすべての標本が何の制限もなく入手し得る場合はむしろ少ない。たとえば,治水計画においては,高水のピーク流量の分布が問題となるが,

普通，高水観測は警戒水位，あるいは指定水位などのある限界値以上の水位に対して実施されている場合が多い。さらに，実用解析上からもなるべく少数の標本で母数が推定できれば好都合である。

そこで，ここではとくに部分的な標本として変量 x_1 に関してある限界値 x_c 以上の標本が得られた場合，換言すれば，何も制限なしに得られた全標本数 N の x_1 のうち上位 n 個しか入手し得ない場合に母数をどのように推定すべきかを考えることにする。

さて，一変数統計において，このような順序統計量として考えた標本の大きい方または小さい方が分からない場合の母数推定の問題は，いわゆる中途打ち切り標本の理論 (censored sampling theory) が，気象統計，人口統計などの分野で，とくに下位標本の問題に対して応用されている。^{1), 2)} ここでは，それを上位標本の問題に置き直して考えてみよう。説明の便宜上， x_1 を制約付変量， x_2 を制約外変量と呼んでおく。

まず，制約付変数 x_1 についての周辺分布に関する母数の推定を行ない，その後制約外変量 x_2 についての周辺分布に関する母数および相関母数の推定を行なうことにする。

3・3・2 二変数正規分布における母数推定

1) 制約付変量に関する母数推定

x_1 に関する周辺分布が

$$g(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2 \right\} \quad (3.3-1)$$

で与えられる場合，総数 N の標本中より大きい方から n の標本を取出し，母数 σ_1, m_1 を最尤法によって推定する方法を考える。

標本には小さい方から順番を付けることにし，大きい方から i 番目 (小さい方から $N - i + 1$ 番目) の順序統計量を $x_{(N-i+1)}$ と記すことにする。なお以後，制約付変量を意味する 1 は略記することにする。したがって $x_{(N-i+1)}$ の密度分布は次式のようになる。

$$g(x_{(N-i+1)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_{(N-i+1)} - m}{\sigma} \right)^2 \right\} \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

これより， n コの標本 $x_{(N-n+1)}, x_{(N-n+2)}, \dots, x_{(N)}$ のもつ尤度 L は次式で表わせる

$$\begin{aligned}
 L(m, \sigma; x_{(N-n+1)}, x_{(N-n+2)}, \dots, x_{(N)}) \\
 &= \binom{N}{N-n} \left[\int_{-\infty}^{x_{(N-n+1)}} g(u) du \right]^{N-n} n! \prod_{j=N-n+1}^N g(x_{(j)}) \\
 &= \frac{N!}{(N-n)!} \int_{-\infty}^{x_{(N-n+1)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-m}{\sigma}\right)^2\right\} du \\
 &\quad \times \prod_{j=N-n+1}^N \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{(j)}-m}{\sigma}\right)^2\right\} \right] \\
 &= \frac{N!}{(N-n)! (2\pi)^{n/2} \sigma} \left[\phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \right]^{N-n} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=N-n+1}^N \left(\frac{x_{(j)}-m}{\sigma}\right)^2\right\}
 \end{aligned} \tag{3.3-2}$$

ただし，

$$x_c = x_{(N-n+1)}, \quad \phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

である。したがって (3.3-2) 式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 \log L &= \log \frac{N!}{(N-n)! (2\pi)^{n/2} \sigma} - n \log \sigma \\
 &\quad + (N-n) \log \left[\phi\left(\frac{x_c-m}{\sigma}\right) \right] - \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{x_{(i)}-m}{\sigma}\right)^2
 \end{aligned} \tag{3.3-3}$$

これより m, σ に関する最尤方程式

$$\partial(\log L) / \partial m = \partial(\log L) / \partial \sigma = 0$$

を連立して求めると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 -\frac{n}{N} + (1 - \frac{n}{N}) \frac{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_c-m}{\sigma}\right)^2\right\} \right\} \frac{x_c-m}{\sigma}}{\phi\left(\frac{x_c-m}{\sigma}\right)} \\
 + \frac{n}{N} \cdot \frac{1}{n} \sum_j \left(\frac{x_{(j)}-m}{\sigma}\right) = 0 \\
 \left. \begin{aligned}
 (1 - \frac{n}{N}) \frac{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_c-m}{\sigma}\right)^2\right\} \right\}}{\phi\left(\frac{x_c-m}{\sigma}\right)} + \frac{n}{N} \cdot \frac{1}{n} \sum_j \frac{x_{(j)}-m}{\sigma} \\
 = 0
 \end{aligned} \right\} \tag{3.3-4}$$

さらに

$$t = \frac{x_c - m}{\sigma}, \quad v = \frac{m}{\sigma}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (3.3-5)$$

と略記し，大標本としての近似式

$$\begin{aligned} \frac{n}{N} &= \int_x^\infty g(u) du = \int_t^\infty \varphi(t) dt \\ &= 1 - \Phi(t) = \Phi(-t) \end{aligned} \quad (3.3-6)$$

を用いると，(3.3-4)式は次式で表わせる。

$$\begin{aligned} & -\Phi(-t) - t\varphi(t) \\ & + \Phi(-t) \{ (v+t)^2 \beta - 2v(v+t)\alpha + v^2 \} = 0 \end{aligned} \quad (3.3-7)$$

$$-\varphi(t) + \Phi(-t) \{ (v+t)\alpha - v \} = 0 \quad (3.3-8)$$

ただし， α および β はそれぞれ上位標本の無次元化平均値，無次元化二乗平均値で次式で与えられるものである。

$$\alpha = \frac{1}{n x_c} \sum_{j=N-n+1}^N x_{(j)}, \quad \beta = \frac{1}{n x_c^2} \sum_{j=N-n+1}^N x_{(j)}^2 \quad (3.3-9)$$

すなわち，標本が与えられれば α ， β は計算でき，(3.3-7)，(3.3-8)式で t は m ， σ の関数， v も m ， σ の関数であるから両式より m ， σ は原理的に求められるはずである。実際の解法はつぎのようにすればよい。

まず，(3.3-8)式を v について解くと次式

$$v = \frac{1}{\alpha - 1} \left\{ -\frac{\varphi(t)}{\varphi(-t)} - t\alpha \right\} \quad (3.3-10)$$

が得られるが，これを(3.3-7)式に代入し v を消去すると，次式の t のみの関数になる。

$$\begin{aligned} A(t) &\equiv \frac{\{\Phi(-t)\}^2 + t\varphi(t)\{\Phi(-t)\} - \{\varphi(t)\}^2}{\{\varphi(t) - t\Phi(-t)\}^2} \\ &= \frac{\beta - \alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \end{aligned} \quad (3.3-11)$$

そこで、あらかじめ t と $A(t)$ の関係求めておけば、与えられた α, β に対して上式右辺は計算でき、これに対する t を逆算することは容易である。こうして求められた t を \hat{t} と記すと、 \hat{t} を (3.3-10) 式へ代入して v の推定値 \hat{v} が求められる。したがって求める m, σ の最尤推定値は、(3.3-11) 式より次式で与えられる。

$$\hat{m} = \frac{x_c \hat{v}}{\hat{t} + \hat{v}}, \quad \hat{\sigma} = \frac{x_c}{\hat{t} + \hat{v}} \quad (3.3-12)$$

なお、以上の計算に必要な関数 $\varphi(t), \Phi(-t)$ は数表になっている³⁾からそれを利用すると、関数 $A(t)$ および $\varphi(t)/\Phi(-t)$ は容易に計算できて、図 3.3-1 および図 3.3-2 のようになる。

図 3.3-1

t と $A(t)$ の関係

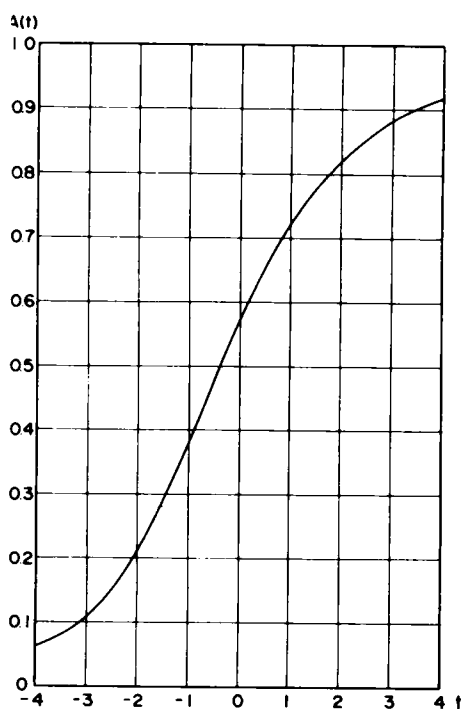
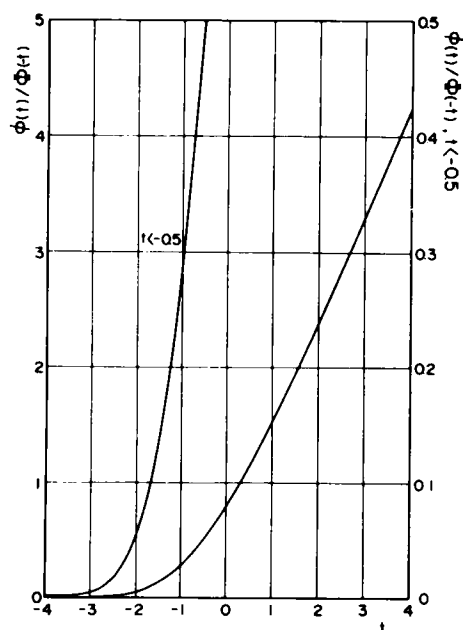


図 3.3-2

t と $\varphi(t)/\Phi(-t)$ の関係



2) その他の母数の推定

残された未知母数 σ_2 , m_2 , ρ を推定する。

a. 同時標本がすべて既知の場合

x_1 を与えた場合の x_2 の条件付平均値による x_2 の推定，すなわち回帰曲線の式は周知のように次式で表わされる。

$$x_2 = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - m_1) + m_2$$

ところで，前記のようにして σ_1 , m_1 は既知となるから，上式はさらに次式のように簡単に表現できる。

$$\left. \begin{aligned} y &= a\xi + b \\ \text{ただし,} \\ a &= \rho \sigma_2, \quad b = m_2, \quad \xi = (x_1 - m_1) / \sigma_1, \quad y = x_2 \end{aligned} \right\} (3.3-19)$$

(1.1-9) 式が回帰曲線であることから，定数 a , b は最小自乗的に次式のようにして推定できる。⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} &= (\hat{\rho} \sigma_2) = \frac{\overline{\xi y} - \bar{\xi} \bar{y}}{\overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2} = \frac{\overline{\xi x_2} - \bar{\xi} \bar{x}_2}{\overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2} \\ \hat{b} &= m_2 = \frac{\overline{\xi^2 y} - \bar{\xi} \bar{\xi} \bar{y}}{\overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2} = \frac{\overline{\xi^2 x_2} - \bar{\xi} \bar{\xi} \bar{x}_2}{\overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2} \end{aligned} \right\} (3.3-20)$$

したがって，たとえば σ_2 が推定されればすべての未知母数が推定されたことになる。そこで以下では標本 (ξ_i, x_{2i}) ($i=1, 2, \dots$) による σ_2 の推定を行なう。総数 N の標本のうち x_1 について x_{1c} 以上， ξ について ξ_c 以上 n 個の標本が既知であるとし，たとえば n 個の ξ_i の平均値を $\bar{\xi}$ のように記すと，以下の統計量の平均値が求められる。ただし $f(\xi, y)$ は全標本に対する点 ξ, y における密度分布および $f(\xi | y)$ は y を固定した場合の ξ の条件付分布である。

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{N}{n} \int_{\xi_c}^{\infty} f(\xi, y) d\xi dy \\ &= \frac{N}{n} \int_{\xi_c}^{\infty} \varphi(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|\xi) dy \cdot d\xi\end{aligned}$$

ところで，

$$\int_{-\infty}^{\infty} y f(y|\xi) dy = E(y|\xi) = a\xi + b$$

であるから， \bar{y} は結局つぎのようになる。

$$\bar{y} = a\bar{\xi} + b \quad (3.3-21)$$

さらに y についての分散 D_y^2 は同様にして

$$D_y^2 = \frac{N}{n} \int_{\xi_c}^{\infty} \varphi(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{y})^2 f(y|\xi) dy \cdot d\xi$$

と書けるが

$$\begin{aligned}& \int_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{y})^2 f(y|\xi) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y - a\xi - b)^2 f(y|\xi) dy \\ & \quad + 2(a\xi + b - \bar{y}) \int_{-\infty}^{\infty} (y - a\xi - b) f(y|\xi) dy + (a\xi + b - \bar{y})^2 \\ &= \sigma_2^2 (1 - \rho^2) + (a\xi + b - \bar{y})^2\end{aligned}$$

であるから

$$D_y^2 = \sigma_2^2 (1 - \rho^2) + a^2 \{ \overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2 \}$$

となる。したがって $\hat{\sigma}_2 \rho = a$ ， $D_y^2 = \overline{x_2^2} - (\bar{x}_2)^2$ を用いると，標準偏差 σ_2 は次式で推定される。

$$\hat{\sigma}_2 = \left[\overline{x_2^2} - (\bar{x}_2)^2 - \frac{(\overline{\xi x_2} - \bar{\xi} \bar{x}_2) \{ \overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2 - 1 \}}{\{ \overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2 \}^2} \right]^{1/2} \quad (3.3-22)$$

さらに (3.3-20), (3.3-22) 式により求めた a , a_2 を用いると, 相関係数 ρ は次式で推定される。

$$\rho = \frac{\hat{a}}{\hat{a}_2} \quad (3.3-23)$$

b. 同時標本が部分的にしか既知でない場合

一般的な解を得ることは困難であるので, ここでは変量 x_2 に関しても x_1 と同様に周辺分布に関する母数推定が可能であり, a_2, m_2 が求められた場合に残された相関母数 ρ のみを推定することを考えよう。

すなわち, x_1, x_2 を規準化変量 ξ, η を用いて表現すると, 密度関数 $f(\xi, \eta)$ は周知のように次式のようになる。

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \quad (3.3-24)$$

この分布に従う母集団から大きさ m の標本 (ξ_i, η_i) ($i=1, 2, \dots, m$) をとり出すとき, m 個の標本の尤度 P は

$$\begin{aligned} P &= \prod_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_i) \\ &= (2\pi)^{-m} (1-\rho^2)^{-\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \sum_{i=1}^m (\xi_i^2 - 2\rho\xi_i\eta_i + \eta_i^2)\right\} \end{aligned} \quad (3.3-25)$$

となる。そこで部分標本を全標本とみなして ρ の最尤解を推定することになると, それは $\partial \log P / \partial \rho = 0$ において得られる解である。これを整理すると, 次式を満足するような ρ を求めればよいことになる。

$$\rho^3 - \overline{\xi\eta}\rho^2 + (\overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} - 1)\rho - \overline{\xi\eta} = 0 \quad (3.3-26)$$

3.3.3 二変数ガンマ分布における母数推定

1) 制約付変量に関する母数推定

a. 原点母数が未知の場合

考察を一般的にするために x_1 に関する周辺分布を原点母数 v_1 を含めた形で

考えると、それは次式で与えられる。

$$g(x_1) = \frac{1}{\Gamma(\nu) \sigma^{\nu-1}} (x_1 - \nu_1)^{\nu-1} \exp\left(-\frac{x_1 - \nu_1}{\sigma}\right), \quad x_1 \geq \nu_1$$

(3.3-27)

以後添字 1 は省略する。

総数 N の標本から大きい方より n コの上位標本を抽出したとき、大きい方から i 番目の順序統計量 $x_{(N-n+1)}$ の密度分布は次式で表わされる。

$$g(x_{(N-n+1)}) = \frac{1}{\Gamma(\nu) \sigma^{\nu-1}} (x_{(N-n+1)} - \nu)^{\nu-1} \exp\left\{-\frac{x_{(N-n+1)} - \nu}{\sigma}\right\}$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

したがって n コの標本のもつ尤度 L は次式のように表わせる。

$$\begin{aligned} L(\nu, \sigma; x_{(N-n+1)}, \dots, x_{(N)}) \\ = \frac{N!}{(N-n)!} \left\{ \Gamma(\nu) \right\}^{-N} \sigma^{-n} \left\{ r\left(\nu, \frac{x_{(N-n+1)} - \nu}{\sigma}\right) \right\}^{N-n} \\ \times \left\{ \prod_{j=N-n+1}^N (x_{(j)} - \nu) \right\}^{\nu-1} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma} \sum_{j=N-n+1}^N (x_{(j)} - \nu)\right\} \end{aligned} \quad (3.3-28)$$

ただし、 $r(\nu, x)$ は才 1 種不完全ガンマ関数で

$$r(\nu, x) = \int_0^x t^{\nu-1} e^{-t} dt$$

で定義される。さらに表現を簡単にするためにつぎの記号を使用する。

$$\left. \begin{aligned} x_c &= x_{(N-n+1)} \\ R &= (x_c - \nu) \frac{1}{n} \sum_{j=N-n+1}^N \frac{1}{x_{(j)} - \nu} \\ S &= \frac{1}{x_c - \nu} \left\{ \prod_{j=N-n+1}^N (x_{(j)} - \nu) \right\}^{\nu-1} \\ T &= \frac{1}{x_c - \nu} \frac{1}{n} \sum_{j=N-n+1}^N (x_{(j)} - \nu) \end{aligned} \right\} \quad (3.3-29)$$

これによって (3.3-28) 式は

$$\begin{aligned} \log L = & \log \frac{N!}{(N-n)!} - N \log \Gamma(\nu) - \nu n \log \sigma \\ & + (N-n) \log \left[r\left(\nu, \frac{x_c - \nu}{\sigma}\right) \right] + (\nu-1) \log \{ n (x_c - \nu) S \} \\ & - \frac{1}{\sigma} (x_c - \nu) T \end{aligned}$$

したがって， ν ， ν ， σ の推定に関する最尤解は

$$\partial \log L / \partial \nu = \partial \log L / \partial \nu = \partial \log L / \partial \sigma = 0$$

を求めればよい。これは次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} -\left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\xi_c^{\nu-1} e^{-\xi_c}}{r(\nu, \xi_c)} - (\nu-1) \frac{n}{N} \frac{1}{\xi_c} + \frac{n}{N} &= 0 \\ -\psi(\nu) + \frac{n}{N} \log \xi_c + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{r_\nu(\nu, \xi_c)}{r(\nu, \xi_c)} + \frac{n}{N} \log S &= 0 \\ -\frac{n}{N} \nu - \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\xi_c^{\nu-1} e^{-\xi_c}}{r(\nu, \xi_c)} + \frac{n}{N} \xi_c T &= 0 \end{aligned} \right\} (3.3-30)$$

ただし，上式中の記号は

$$\left. \begin{aligned} \psi(\nu) &= \Gamma'(\nu) / \Gamma(\nu) \quad (\text{psi 関数}) \\ \Gamma(\nu, \xi) &= \Gamma(\nu) - r(\nu, \xi) \quad (\text{才 2 種不完全ガンマ関数}) \\ \xi_c &= (x_c - \nu) / \sigma \\ r_\nu(\nu, \xi) &= \frac{d}{d\nu} r(\nu, \xi) \end{aligned} \right\} (3.3-31)$$

である。さらに標本数が大きければ次式の近似が成立つ。

$$\begin{aligned} \frac{n}{N} &= \int_{x_c}^{\infty} g(x) dx = \int_{\xi_c}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \xi^{\nu-1} e^{-\xi} d\xi \\ &= 1 - \frac{r(\nu, \xi_c)}{\Gamma(\nu)} = \frac{\Gamma(\nu, \xi_c)}{\Gamma(\nu)} \end{aligned} \quad (3.3-32)$$

上式を (3・3-30) 式に用いることによって、結局次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi_c}{\nu-1} - \frac{\xi_c^{\nu-1} e^{-\xi_c}}{(\nu-1) \Gamma(\nu, \xi_c)} &= R \\ \exp \left\{ \frac{d}{d\nu} \left\{ \log \frac{\Gamma(\nu, \xi_c)}{\Gamma(\nu)} \right\} + \psi(\nu) \right\} / \xi_c &= S \\ \frac{\xi_c^{\nu-1} e^{-\xi_c}}{\Gamma(\nu, \xi_c)} + \frac{\nu}{\xi_c} &= T \end{aligned} \right\} \quad (3.3-33)$$

原理的には上式を連立して、未知数 ν , ν , ξ_c を解けばよいが、実用的にはつぎのような図式解法が便利である。

まず前もって ν , ξ_c 面上で R , S および T の曲線群を描いておく。つぎに ν を適当に仮定し, $x_{(1)} - \nu$ を求め (3・3-29) 式より R , S , T を計算する。さらに描かれた曲線群の交点として, R , S より一次近似値 ν' , ξ_c' , S , T より ν'' , ξ_c'' を求め, これが一致するまで, すなわち, $\nu' = \nu''$, $\xi_c' = \xi_c''$ となるまで ν を変えて試算を繰り返す最終的な解, $\hat{\nu}$, $\hat{\nu}$ および $\hat{\xi}_c$ を求める。最後に, (3・3-31) 式より

$$\hat{\sigma} = (x_c - \hat{\nu}) / \hat{\xi}_c \quad (3.3-34)$$

によって σ の推定値が求められる。

この図式解法に必要な ξ_c , ν 面上での R , S および T の曲線群を計算すると, 図 3・3-3, 3・3-4, 3・3-5 のようになる。なお図面作製に必要な不完全ガンマ関数は Pearson の数表⁵⁾ などを利用した。

图 3.3-3

$$R = \frac{\xi_c}{\nu - 1} - \frac{\xi_c e^{-\xi_c}}{(\nu - 1) \Gamma(\nu, \xi_c)}$$

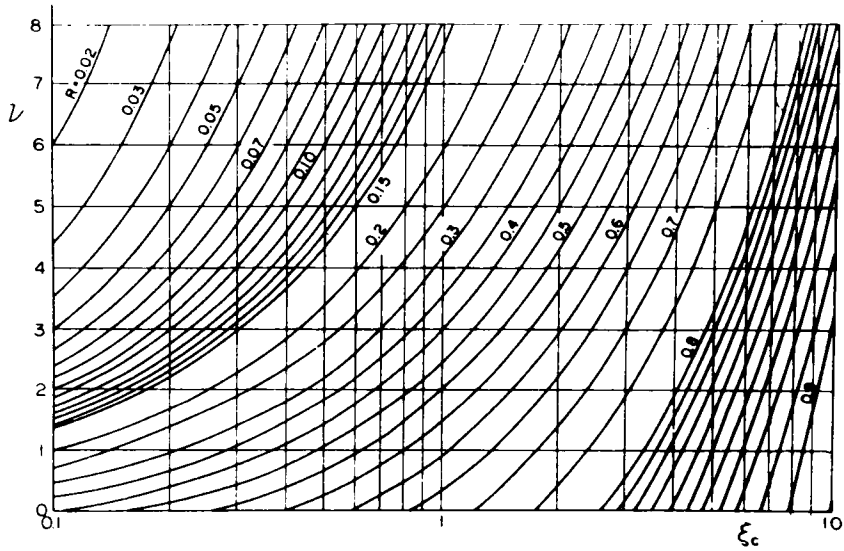


图 3.3-4

$$S = \exp \left[\frac{d}{d\nu} \left\{ \log \frac{\Gamma(\nu, \xi_c)}{\Gamma(\nu)} \right\} + \psi(\nu) \right] / \xi_c$$

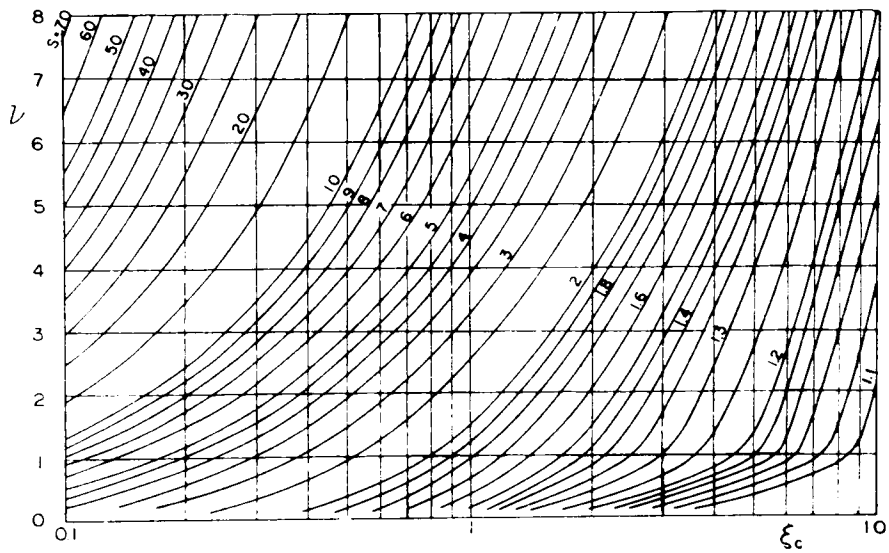
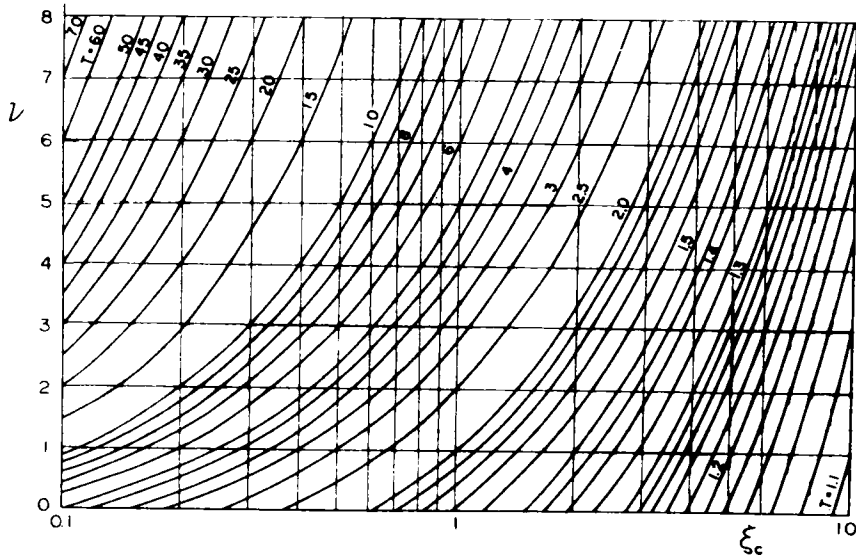


図 3・3-5

$$T = \frac{e^{-\xi_c} \xi_c^{\nu-1}}{\Gamma(\nu, \xi_c)} + \frac{\nu}{\xi_c}$$



したがって，理論的にはこのような試算で未知母数が推定できるはずであるが，実際の計算にはかなり労力を要する。そこでもう少し簡単に解の得られる場合として，原点母数が既知あるいは 0 と仮定しうる場合の解をつぎに示しておく。

b. 原点母数が既知の場合

ここでは原点母数が既知の場合の解を，前の結果を用いて簡単に誘導しておく。すなわち，既知の原点母数 ν をもとの変量 x から差引いた $(x - \nu)$ を新しい変量と考えればよいから，前の場合で ν が 0 となる場合の解を求めておけばよい。したがって (3・3-29) 式に対応して

$$S = \frac{1}{x_c} \left\{ \prod_{j=N-n+1}^N x_{(j)} \right\}^{1/n}, \quad T = \frac{1}{x_c} \frac{1}{n} \sum_{j=N-n+1}^N x_{(j)} \quad (3 \cdot 3 - 29')$$

および (3・3-31) 式中の規準化変量 ξ_c として

$$\xi_c = x_{(N-n+1)} / \sigma \quad (3 \cdot 3 - 31')$$

を用いればよい。また最終的な解として，(3・3-33) 式中の R に関する項は不要で， S ， T に関する項のみが残る。すなわち，

$$\left. \begin{aligned} \exp \left\{ \frac{d}{d\nu} \left\{ \log \frac{\Gamma(\nu, \xi_c)}{\Gamma(\nu)} \right\} + \psi(\nu) \right\} / \xi_c = S \\ - \frac{\xi_c^{-1} e^{-\xi_c}}{\Gamma(\nu, \xi_c)} + \frac{\nu}{\xi_c} = T \end{aligned} \right\} \quad (3.3-33)$$

が得られる。

したがって、上位標本について(3.3-29)式でS, Tを求め、このS, Tを使って上式を連立させて解いた ν, ξ_c の推定値 $\hat{\nu}, \hat{\xi}_c$ を求め、さらに(3.3-31)式より σ の推定値 $\hat{\sigma}$ は次式

$$\hat{\sigma} = \frac{x_{N-n+1}}{\hat{\xi}_c} \quad (3.3-35)$$

で求められる。

ところで、すでに ξ_c, ν 面上におけるS, Tの曲線群が図3.3-4, 3.3-5のように得られている。したがって2曲線S, Tの交点の座標として ξ_c, ν を図式的に求めることは容易である。

2) その他の母数推定

つぎに残された未知母数、すなわち制約外変量の周辺分布に関する母数および相関母数の推定を同時標本がすべて既知の場合と部分的にしかわからない場合に区別して考える。なお、簡単のために、 $\nu_1 = \nu_2 = \nu, \nu_1 = \nu_2 = 0$ と仮定する。前記の結果により、 σ_1, ν は既知となるから、推定すべき母数は σ_2 と ρ である。

a. 同時標本がすべて既知の場合

まず、 $x_1 (> x_{1c})$ に対応する x_2 の同時標本 (x_1, x_2) がすべて既知の場合と考える。ところで、 x_1 を与えた場合の x_2 の条件付平均値は(2.1-14)式、すなわち

$$E(x_2 | x_1) = \nu \sigma_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \nu \sigma_1)$$

の直線となることはすでに求められている。また、 $x_2 = E(x_2 | x_1)$ として x_2 を推定しようとした場合の x_1, x_2 面内の軌跡が回帰曲線であるが、それは同

時に， x_1 より x_2 を推定する際の自乗誤差を最小にするものであることが知られている。上式を簡単のために

$$\left. \begin{aligned} y &= au + b \\ a &= \rho \sigma_2, \quad b = \nu \sigma_2, \quad u = x_1/\sigma_1 - \nu, \quad y = x_2 \end{aligned} \right\} (3.3-36)$$

と表現すると，前述したように上式が回帰曲線であることから定数 a ， b は入手しうる同時標本 (x_{1i}, x_{2i}) から最小自乗的に求められる。

すなわち，回帰直線による推定の自乗誤差

$$I = \sum_{i=1}^n (y_i - au_i - b)^2$$

が最小となるために定数 a ， b に対する条件 $\partial I / \partial a = \partial I / \partial b = 0$ より次式が得られる。

$$a = \frac{\overline{uy} - \bar{u}\bar{y}}{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} \quad b = \frac{\overline{u^2 y} - \bar{u}\bar{u}\bar{y}}{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} \quad (3.3-37)$$

したがって，求める σ_2 ， ρ の推定値は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_2 &= \frac{\overline{u^2 y} - \bar{u}\bar{u}\bar{y}}{\nu \{ \overline{u^2} - (\bar{u})^2 \}} = \frac{\overline{\xi^2 x_2} - \bar{\xi} \bar{\xi} \bar{x}_2 + \nu (\overline{\xi x_2} - \bar{\xi} \bar{x}_2)}{\nu \{ \overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2 \}} \\ \hat{\rho} &= \frac{\nu (\overline{uy} - \bar{u}\bar{y})}{\overline{u^2 y} - \bar{u}\bar{u}\bar{y}} = \frac{\nu (\overline{\xi x_2} - \bar{\xi} \bar{x}_2)}{\overline{\xi^2 x_2} - \bar{\xi} \bar{\xi} \bar{x}_2 + \nu (\overline{\xi x_2} - \bar{\xi} \bar{x}_2)} \end{aligned} \right\} (3.3-38)$$

ただし，上式において $\xi = x_1/\sigma_1$ であり，また，たとえば $\bar{\xi}$ は， n 個の ξ ， $(i=1, 2, \dots, n)$ の平均値を意味している。

b. 同時標本が部分的にしか既知でない場合

この場合には，厳密な推定はまず困難であると考えられるから，入手しうるすべての標本のもつ確率情報を最大限有効に活用する推定方法によらざるを得ない。そこで，ここでは，入手しうるすべての同時標本 (x_{1i}, x_{2i}) ($i=1, 2, \dots, m$)を全標本のように考えた最尤解として，以下のような近似的な推定方法が考えられる。

まず，制約付変量 x_1 を3.3.3の1)で求めた σ_1 を使って， $\xi = x_1/\sigma_1$ で規準化しておくと， ξ と x_2 の同時分布は，(2.2-1)式により次式のようなになる。

$$f(\xi, x_2) = \frac{1}{\Gamma(\nu) \sigma_2^{\frac{\nu+1}{2}} (1-\rho) \rho^{\frac{\nu-1}{2}}} \exp\left\{-\frac{\xi}{1-\rho} - \frac{y}{\sigma_2(1-\rho)}\right\} \\ \times (\xi x_2)^{\frac{\nu-1}{2}} \times I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\frac{\xi x_2}{\sigma_2}}\right)$$

したがってこの分布に従う m 個の標本 (ξ_i, x_{2i}) ($i=1, 2, \dots, m$) のもつ尤度 P は,

$$P = \prod_{i=1}^m f(\xi_i, x_{2i})$$

で求まるから, $\partial \log P / \partial \sigma_2 = \partial \log P / \partial \rho = 0$ とおき, σ_2 を消去して整理すると, 未知母数 ρ を与える式として次式が得られる。

$$\frac{2\rho}{1-\rho} \bar{\xi} = \bar{G} \quad (3.3-39)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} G &= G(z_i) = \frac{z_i I_1(z_i)}{I_{\nu-1}(z_i)}, \\ z_i &= \frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\xi_i x_{2i}} \left\{ \frac{\rho \bar{\xi} + \nu(1-\rho)}{x_2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.3-40)$$

であり, さらに, たとえば \bar{G} は $G(z_i)$ ($i=1, 2, \dots, m$) の m 個の平均を意味している。上式から ρ の最尤解 $\hat{\rho}$ が求められれば, σ_2 の最尤解 $\hat{\sigma}_2$ は次式で求められる。

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{\bar{x}_2}{\hat{\rho} \bar{\xi} + \nu(1-\hat{\rho})} \quad (3.3-41)$$

しかし, 以上の諸式において ρ が陰に含まれているために, 実際上の計算には以下のような試算を必要とする。

まず適当な初期値 $\rho = \rho_0$ を仮定し (3.3-40) 式で $G(z_i)$ を計算し, (3.3-39) 式より補正值

$$\rho_1 = \frac{\bar{G}}{2\bar{\xi} + \bar{G}} \quad (3.3-42)$$

を算出し，補正量 $\Delta\rho_1 = \rho_1 - \rho_0$ を求める。このような試算を繰返し最終的な補正量 $\Delta\rho_1 = \rho_1 - \rho_0$ が0となるような $\rho = \rho_1$ を求めるわけである。この計算に必要な関数 $G(z)$ は，既出の(3・2-15)式の関数 $K_1(z)$ と

$$G(z) = \nu K_1(z)$$

の関数があり，主な ν に対する $G(z)$ の値は $K_1(z)$ のグラフより求められる。

つぎに特別な場合として， x_2 の周辺分布に関する母数 σ_2 も推定でき，したがって x_2 の規準化 $\eta = x_2/\sigma_2$ が可能な場合を考える。この場合の ρ の最尤解は，(3・3-39)式の密度関数で， $\sigma_2 = 1$ ， $x_2 = \eta$ とおき，未知母数 ρ のみについて解くと次式が求められる。

$$2\nu\rho(1-\rho) - 2\rho\bar{\xi} - 2\rho\bar{\eta} + (1-\rho^2)\bar{G} = 0$$

上式は ρ に関する二次方程式であるが，いまの場合正根のみを採用し得るから

$$\rho = \frac{-(\bar{\xi} + \bar{\eta} - 1) + \sqrt{(\bar{\xi} + \bar{\eta} - 1)^2 + \bar{G}(\bar{G} + 2\nu)}}{\bar{G} + 2\nu} \quad (3.3-43)$$

を満足する $\rho = \hat{\rho}$ が最尤解を与える。ただし，ここでは

$$z_1 = -\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\xi_1\eta_1}, \quad \eta = \frac{x_2}{\sigma_2} \quad (3.3-44)$$

で，他の記号は前と同様である。

3・3・4 二変数指数分布における母数推定

1) 制約付変量に関する母数推定

a. 原点母数が未知の場合

前と同様に，制約付変量を意味する添字1を略記する。 x の周辺分布を

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x-\nu}{\sigma}\right) \quad (3.3-45)$$

とおくと，3・3・3の場合と全く同様にして，総数 N コの中から上位 n コの標本により， ν ， σ の最尤推定値は(3・3-30)，(3・3-31)式で $\nu = 1$ と置けばよく，また ν が既知であるから S に関する項は不要である。 $r(1, \xi) = 1 - e^{-\xi}$ を用いて整理すると， R に関する項は

$$- \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{e^{-\xi_c}}{1 - e^{-\xi_c}} + \frac{n}{N} = 0$$

すなわち，

$$\frac{n}{N} = e^{-\xi_c} \quad (3.3-46)$$

となるが，これは (3.3-32) 式で $\nu = 1$ とおいた結果と一致する。結局， T に関する項のみが残り，次式となる。

$$-\frac{n}{N} - \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\xi_c e^{-\xi_c}}{1 - e^{-\xi_c}} + \frac{n}{N} \xi_c T = 0 \quad (3.3-47)$$

ところで，

$$\begin{aligned} \xi_c T &= \frac{x_c - \nu}{\sigma} \cdot \frac{1}{x_c - \nu} \frac{1}{n} \sum_{j=N-n+1}^N (x_{(j)} - \nu) \\ &= \frac{1}{n\sigma} \sum_{j=N-n+1}^N x_{(j)} - \frac{\nu}{\sigma} \end{aligned} \quad (3.3-48)$$

であるから，(3.3-46)，(3.3-48) を (3.3-47) に代入することによって，結局最尤法による ν ， σ の推定値として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\nu} &= x_{(N-n+1)} - \left(\frac{1}{n} \sum_{j=N-n+1}^N x_{(j)} - x_{(N-n+1)} \right) \log \frac{N}{n} \\ \hat{\sigma} &= \frac{1}{n} \sum_{j=N-n+1}^N x_{(j)} - x_{(N-n+1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.3-49)$$

b. 原点母数が既知の場合

これは前の場合で $\nu = 0$ とおくことによって，(3.3-49) 式に対応して，

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{j=N-n+1}^N x_{(j)} - x_{(N-n+1)} \quad (3.3-50)$$

あるいは，(3.3-46) 式より

$$\frac{n}{N} = \exp \left(-\frac{x_{(N-n+1)}}{\sigma} \right)$$

であるから， $x_{(N-n+1)}$ を消去した形では

$$\hat{\sigma} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=N-n+1}^N x_{(j)}}{1 + \log \frac{N}{n}} \quad (3.3-50')$$

で σ の最尤推定値を求めればよい。

なお，以上の最尤解による結果をみると，角屋が積率解から求めた結果⁶⁾と完全に一致していることを付け加えておく。

2) その他の母数の推定

a. 同時標本がすべて既知の場合

前出の二変数ガンマ分布に対する (3.3-38) 式において， $\nu = 1$ とおくことによって， α_2 および ρ の推定値は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha}_2 &= \frac{\bar{\xi}^2 \bar{x}_2 - \bar{\xi} \bar{\xi x}_2 + \bar{\xi x}_2 - \bar{\xi x}_2}{\bar{\xi}^2 - (\bar{\xi})^2} \\ \hat{\rho} &= \frac{\bar{\xi x}_2 - \bar{\xi} \bar{x}_2}{\bar{\xi}^2 \bar{x}_2 - \bar{\xi} \bar{\xi x}_2 + \bar{\xi x}_2 - \bar{\xi x}_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.3-51)$$

b. 同時標本が部分的にしか既知でない場合

まず，相関母数 ρ の推定値は，(3.3-42)，(3.3-43) 式より

$$\frac{2\rho}{1-\rho} \bar{\xi} = \bar{G} \quad (3.3-52)$$

ただし，

$$\left. \begin{aligned} G = G(z_i) &= \frac{z_i I_1(z_i)}{I_0(z_i)} \\ z_i &= \frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\bar{\xi}_i x_{2i}} \left\{ \frac{\rho \bar{\xi} + 1 - \rho}{\bar{x}_2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.3-53)$$

で求められる。さらに上に得られた $\hat{\rho}$ を用いることによって，(3.3-44) 式より， α_2 の推定値は次式で求められる。

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{\bar{x}_2}{\hat{\rho} \bar{\xi} + 1 - \hat{\rho}} \quad (3.3-54)$$

参 考 文 献

- 1) A.K.Gupta; Estimation of the mean and standard deviation of normal population from a censored sample, Biometrika, vol.39, 1952, pp.260-273
- 2) M.B.Wilk, R. Gnanadesikan and M. J. Huyett; Estimation of the gamma distribution using order statistics, Biometrika, vol. 49, part3 and 4, 1962, pp. 525-535
- 3) たとえば, 林桂一著 森口繁一増補; 高等関数表, 才2版, 岩波書店, 1967, pp. 262-265
- 4) H. Cramer; The elements of probability theory, John Wiley & Sons, New York, 1961, p.138
- 5) K. Pearson; Tables of the incomplete Γ -Function Cambridge, published for the Biometrika trustees at the University Press, 1965
- 6) 角屋睦; 水文統計論, 水工学シリーズ64-02, 土木学会水理委員会, 1964.7, p.7

第 4 章 二変数指数分布の母数推定に関する数値実験的研究

4・1 概 説

以上で述べてきたようにして二変数分布に含まれる未知母数を推定することができるが, はたしてそのような推定値がどの程度信頼でき実用に供しうるかがつぎの問題となる。もちろん, このためには, その母数推定の理論的誘導の過程を逐次吟味していくことによってある程度の解明は可能であろうが, 解析的には未解明な点も多いし, また, たとえば積率解と最尤解ではどのような相違がありどちらを使った方が良いのかなどといった問題では, それぞれの誘導にはそれ相応の理論的根拠があり, 現在のところ解析的な手法だけでは完全に解明し難い面を多分に含んでいる。

ところで、このような理論的解決の困難な問題を究明する有力な手段として、近年電子計算機の上で各変数間の関係を保持しながら現象を再現していく工学的手法、すなわちコンピューター・シミュレーションが開発されつつある。とくに確率事象についてのシミュレーションはモンテカルロ・シミュレーションとよばれているが、これには多数の乱数発生およびその統計的処理を要するから、電子計算機の高速度かつ多数回反復の可能という演算能力は極めて有効なものであって、手計算や機械的計算機において事実上不可能と思われる検討を可能にしている。

さて、推定すべき母数には、たとえば正規分布の場合、平均値、標準偏差、相関係数、ガンマ分布では原点母数、形状母数、尺度母数および相関母数がある。そのうち、相関に関する母数（以後相関母数とよぶ）以外はいずれも単変数の取扱いで推定可能であり、推定値の信頼性についても従来からかなりの理論的研究があり、最近ではモンテカルロ・シミュレーションによる研究も行なわれている。¹⁾ そこで、ここでは二変数問題においてとくに本質的であると考えられる相関母数を中心として検討し、他の母数についての詳細な議論は別の機会に譲ることにしたい。

ところで、正規分布以外の二変数分布で、推定母数の信頼性を数値実験的に検討した研究はあまり見当たらないが、モンテカルロ・シミュレーションの初期的研究として Campbell の二変数ポアソン分布についての理論および数値実験がある²⁾ ので少し説明してみよう。これは、二変数ポアソン分布の理論的誘導と、所与の平均値（したがって標準偏差）、相関係数をもつと予想される物理モデルを作製し、得られた実験値と理論値との間の相違を統計的に検定し有意な差が認められないことを確かめたもので、理論分布の実在性の実証されている。もちろん、確率分布発生に物理的なモデルを採用している関係上、たった1例についての検討に過ぎないが、考え方は示唆的であるといえよう。

つぎに、著者の行なった手法を述べる。まず、Campbell の場合と同じように相関母数以外の分布母数は完全に推定されたものとし、すなわち確率変数を規格化した状態において、母集団の相関係数を仮定して二変数確率変数からなる標本を多数組模擬発生させ、それから各推定法によって得られた標

本相関係数ともとの母相関係数を比較検討するという方法をとることにした。
使用する分布型としては指数分布およびそれから変換された正規分布を用い、
標本コ数，組数などについて影響を調べた。

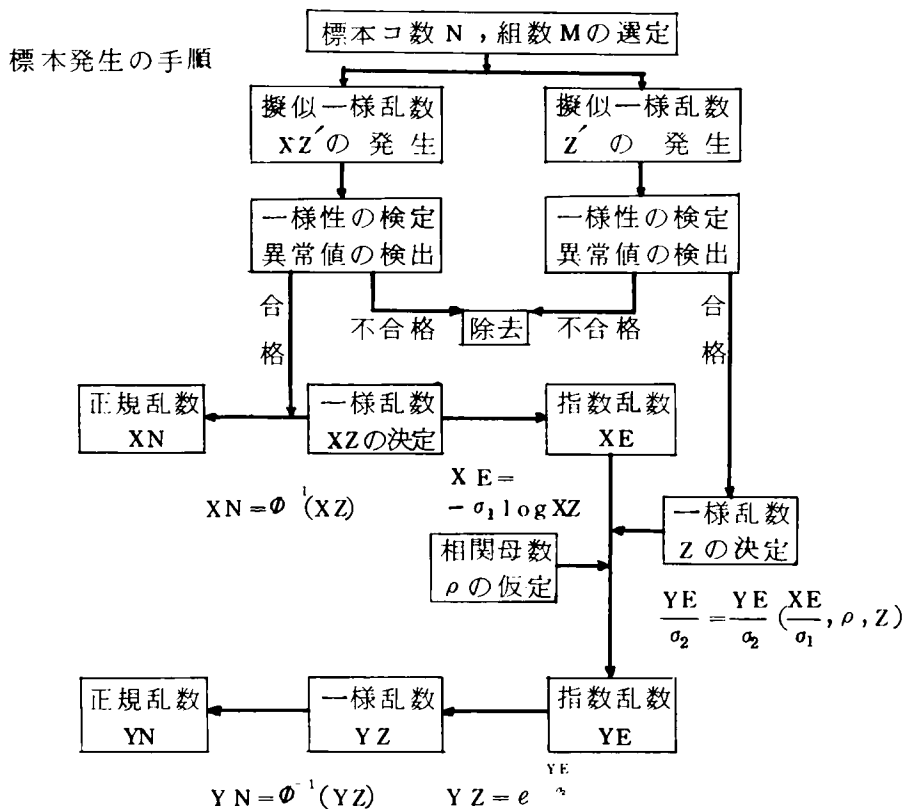
4・2 全標本による母数推定値の検討

4・2・1 標本発生法

ここにおける標本の発生とは，前述の二変指数分布の理論に従って，分布
母数をすべて与えておいた場合の対応する確率変数の組 (x_1, x_2) を，電子計
算機内で発生させた乱数を使って，つぎつぎに発生させていくものである。

その発生手順の概略は，図4・2-1に示したようである。

図4・2-1



具体的に手順を説明するとつぎのようである。

- (1) 標本コ数 N , および組数 M を選定する。
- (2) 擬似一様乱数 XZ' , Z' を発生させる。
- (3) この一様乱数の一様性の検定と異常値の検出を行ない, 合格したものを一様乱数 XZ , Z とする。
- (4) $XE = -\sigma_1 \log XZ$ で , XZ を尺度母数 σ_1 の指数変量に変換する。
ただし, ここでは $\sigma_1 = 1$ を採用している。
- (5) 相関母数 ρ を仮定し, 規準化指数乱数 $\xi = XE / \sigma_1$ が与えられたときに対応する規準化指数乱数 $\eta = YE / \sigma_2$ を, 条件付非超過確率 $F(\eta | \xi)$ に一様乱数 Z を与えて計算する。これには表 2・1 ~ 2・9 を利用して適当な補間を行なって算出している。
- (6) $YE = \sigma_2 \eta$ で, η を尺度母数 σ_2 をもつ指数乱数に変換するが, ここでは $\sigma_2 = 1$ を採用している。
- (7) また, 二変数一様乱数 (XZ , YZ) より次式を使って規準化した二変数正規乱数 XN , YN に変換する。

$$XZ = \int_0^{XN} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$YZ \equiv \exp\left(-\frac{YE}{\sigma_2}\right) = \int_0^{YN} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

なお, この変換には, 規準正規分布の数表を利用した補間法が用いられている。

- (8) 以上のようにして発生された指数乱数 (XE , YE) は二変数指数分布に従い, 正規乱数 (XN , YN) は二変数正規分布に従うことは明らかである。そこで, まず, 指数乱数について, 積率解, 最尤解によって母数推定を行ない, 仮定した相関母数 ρ と比較する。また, 指数乱数 (XE , YE) 正規乱数 (XN , YN) のそれぞれに対する標本相関係数 r を求め, 上記の結果と対比する。

つぎに, 実際上の計算の具体的な内容を記述するとつぎのとおりである。

- (1) 乱数発生プログラム；2組で各4000コの一様乱数列 $XZ(I)'$, $Z(I)'$ を FACOM-230-60 の基本外部関数 RANDOM を用いて発生させる。乱数発生の基本式は次式の混合型合同法である。

$$X_i = aX_{i-1} + C \quad (\text{modulo } 2^{35})$$

$$X_0 = b$$

定数 a, b, c としては $XZ(I)'$, $Z(I)'$ のそれぞれに対してつぎのように設定した。

	$XZ(I)'$	$Z(I)'$
a ;	257 (= $2^8 + 1$)	129 (= $2^7 + 1$)
b ;	12137516145	12137516145
c ;	12345678901	12345678901

- (2) 乱数の一様性および異常値に対する検討；発生させた乱数系列が，このシミュレーションでの使用に適当かどうかを一様性および異常値の面から検討した。そのために，乱数系列を2000コごとに20組に分け，各組について検定を行なった。

まず，一様性の検定には， χ^2 検定を使い，危険率5%，自由度19に対する $\chi^2_0 = 30.14$ を棄却限界とした。つぎに異常値の検定としては，危険率を5%とした棄却限界 $\epsilon_0 = 1 - (1 - 0.05)^{1/200}$ を用い，0.999744以上あるいは0.000256以下の乱数を異常値として棄てることにした。これらの検討結果は表4・2-1に一括して示してあり， $K = 3, 4, 8, 12$ および15の組の乱数を不採用としている。（表は次頁に記す）

- (3) 指数乱数対の模擬発生；指数乱数 ξ に対する所与の相関母数 ρ の下での η の計算には，あらかじめ二変数指数分布の条件付非超過確率の数表を計算機内に記憶させておき，与えた ξ ， $F(\eta | \xi)$ の近傍の数値に対する η の値を数表から読み，それを二次元のLagrange補間を使って内挿して求めている。補間計算には普通4点×4点を用いている。
- (4) 一様乱数の正規変換；あらかじめ規準正規分布の累積分布の表を計算機内に記憶させておき，与えられた XZ, YZ に対する XN, YN をLagrange補間で内挿して求める。これには普通4点補間を使用している。
- また，計算上の標本としては，各組200コの標本系列を分割して標本数 $N =$

表 4 ・ 2 - 1 一様乱数の一様性および異常値に対する検討

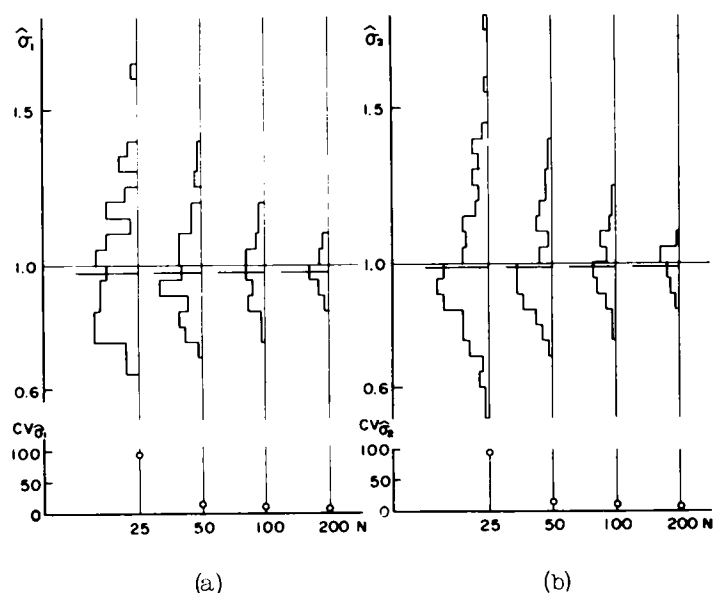
K	χ^2 値		異 常 値
	XZ(I)	Z(I)	
1	11.20	16.80	
2	9.80	16.20	
3	24.40	24.80	XZ (417) = 0.000013
4	22.80	20.40	XZ (737) = 0.999833
5	19.40	24.00	
6	19.00	16.20	
7	21.00	20.40	
8	21.00	11.40	Z (1587) = 0.000156
9	17.40	26.00	
10	16.80	25.20	
11	22.80	10.60	
12	25.00	18.80	Z (2394) = 0.000066
13	13.60	16.80	
14	20.40	13.80	
15	14.00	8.60	Z (2929) = 0.000150
16	15.20	11.40	
17	27.80	23.80	
18	15.80	19.00	
19	16.00	25.20	
20	11.40	21.20	

200, 100, 50, 25の標本を作製している。すなわち，4000 コの擬似乱数資料のうち1000コを一様性，異常値の検定で棄却し，最終的に残った3000コを採用して，標本数 $N = 200, 100, 50, 25$ の標本をそれぞれ組数 $M = 15, 30, 60, 120$ 組用意したわけである。

4・2・2 周辺分布の母数推定値の変動

いまの場合，原点母数を0と仮定しているので，周辺分布に関する母数は σ_1, σ_2 である。(3・2-17) 式による推定値 $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ の計算結果を， $\rho = 0.8$ ， $N = 25, 50, 100, 200$ の各場合について示したのが2-2(a)，(b)である。すなわち，図の上側に実際の推定値のちらばりを0.05の階級に分けた頻度分布のヒストグラムで示してある。

図 4・2-2
尺度母数の推定値の頻度分布，平均値，変動係数



なお，図中で平均値の位置を横線で示している。また，下側にその変動係数を示している。これを見ると， σ_1, σ_2 の平均値は全般に仮定した値1.0より若干小さい値となるが，全体として，このような計算で母数をほぼ正しく推定しうるといえる。また，標本数 N が大きくなるにつれて変動係数が小さくなり推定の精度が良くなっていることは当然である。 $\rho = 0.2, 0.4, 0.6$

についても同じ傾向がみられ，相関母数による差異はみられない。

4・2・3 相関母数の推定値の変動

つぎに相関母数の推定精度を議論するために，つぎの5つの統計量を算定し，比較の対象とした。

$$(1) \quad \rho_n(X, Y) = \frac{\overline{X E \cdot Y E} - \overline{X E} \cdot \overline{Y E}}{\overline{X E} \cdot \overline{Y E}} \quad ; \quad \text{一般に } X E, Y E \text{ がそれぞれ}$$

σ_1, σ_2 の尺度母数の周辺分布に従う場合の (3・2-17) 式による積率解

$$(2) \quad \rho_g(X, Y) ; \xi = X E / \hat{\sigma}_1, \quad \eta = Y E / \hat{\sigma}_2 \text{ を (3・2-18) 式に用いた最尤解}$$

$$(3) \quad \rho_n(\xi, \eta) ; \text{発生された指数乱数を完全に規準化されている，すなわち } \sigma_1 = \sigma_2 = 1 \text{ が成立しているとした積率解}$$

$$(4) \quad \rho_g(\xi, \eta) ; \text{発生された指数乱数を完全に規準化されているとした最尤解}$$

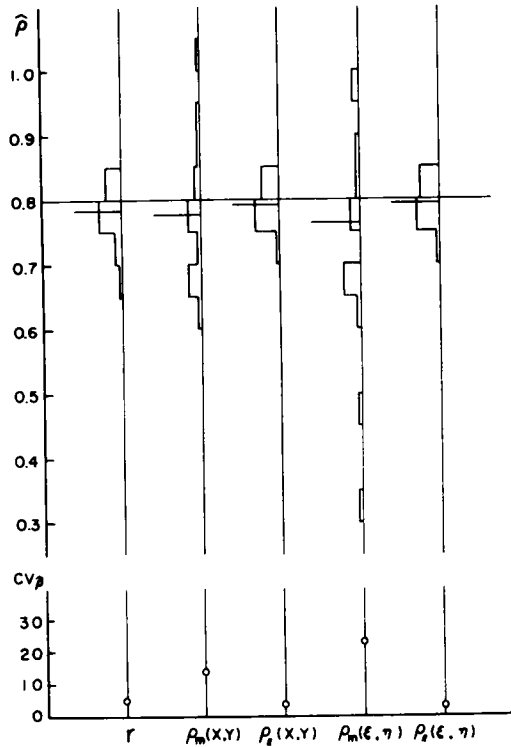
$$(5) \quad r = \frac{\overline{X E \cdot Y E} - \overline{X E} \cdot \overline{Y E}}{S_x \cdot S_y} ; \quad \text{標本相関係数，ただし，} S_x, S_y \text{ は } X E, Y E \text{ の標準偏差}$$

$Y E$ の標準偏差

以上の5つの統計量による相関母数の推定結果を，推定値の頻度分布のヒストグラム，平均値および変動係数を用いて， $\rho = 0.8$ ， $N = 200$ について求めたのが図4・2-3である。これをみると，最尤解は積率解や標本相関係数より推定値の平均値が仮定した母数に近く，かつ変動係数も小さいことから，良い推定結果を与えるといえる。

図 4・2-3

$\rho = 0.8$ に対する各推定法
による相関母数の分布，平
均值，変動係数



なお，最尤解は前述したように試算的に求めざるを得ないが，計算時間のことを考慮してつぎに述べる方法によった。すなわち，まず最初に ρ の初期値 $\rho = \rho_1$ を仮定し，(3・2-18) 式の右辺を計算して求めた $\rho = \rho_2$ との差 $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ を ρ_1 を 0.025 ごとに变えて計算しプロットすると，たとえば図 4・2-4 (a) , (b) に示すようになる。最尤解は $\Delta\rho = 0$ となる ρ であるから， ρ が増加するに従って $\Delta\rho$ の符号が変わる ρ_1 の前後の値から曲線を直線近似することによって $\Delta\rho = 0$ に対する ρ の値を最尤解として与えた。

さらに，発生された二変量 $X E, Y E$ が完全に指数分布に従っておれば (3・2-17) 式によって，

$$S_x = \sqrt{X E^2 - (\overline{X E})^2} = \sqrt{2 \sigma_f^2 - \sigma_f^2} = \overline{X E}$$

となるから，積率解と標本相関係数は一致するはずである。しかし，実際には，両者は若干異なった結果となっている。

図 4・2-4 (a) 相関母数の最尤解の計算過程

$\rho = 0.8$, $K = 1$ 組における ρ_L (ξ, η) の計算

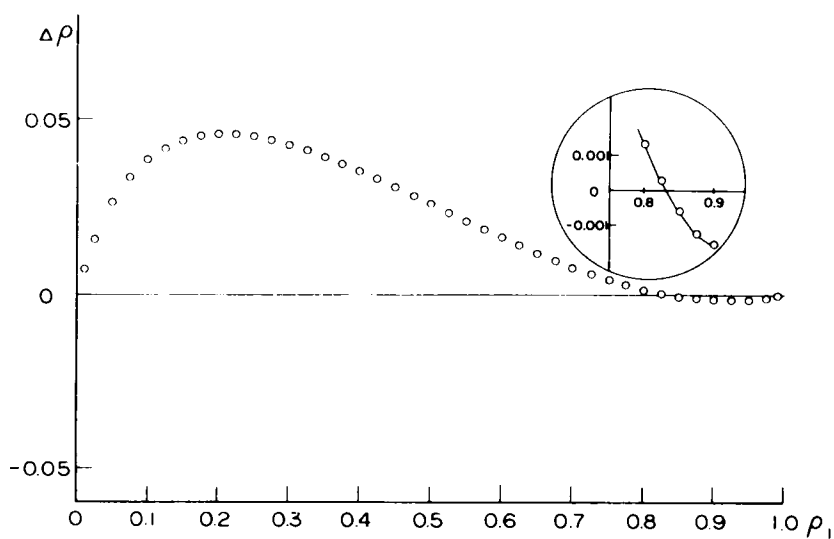
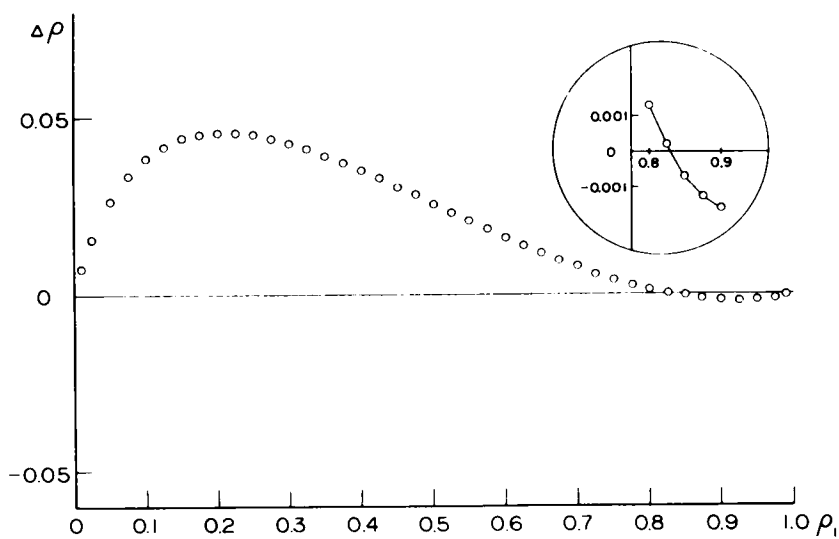


図 4・2-4 (b) 相関母数の最尤解の計算過程

$\rho = 0.8$, $K = 1$ 組における ρ_L (X, Y) の計算



つぎに $\rho = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ および $N = 25, 50, 100, 200$ についての標本相関係数 r の頻度分布およびその平均値を図 4・2-5 (a)~(d) に示してある。全般的に標本数 N が大きくなると r の平均値 $E(r)$ は ρ に近づきさらに変動係数も小さくなる傾向がみられるが、いまの場合標本数 N が増すと組数 M が N に反比例して減小するように標本抽出を行なっているために、 $N = 100$ の場合の $E(r)$ が ρ にもっとも近いという結果が得られている。

図 4・2-5 (a)

標本相関係数の頻度分布と平均値
($\rho = 0.2$)

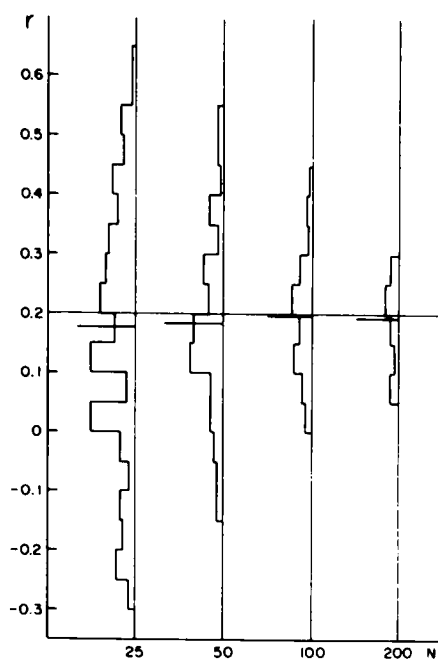


図 4・2-5 (b)

標本相関係数の頻度分布と平均値
($\rho = 0.4$)

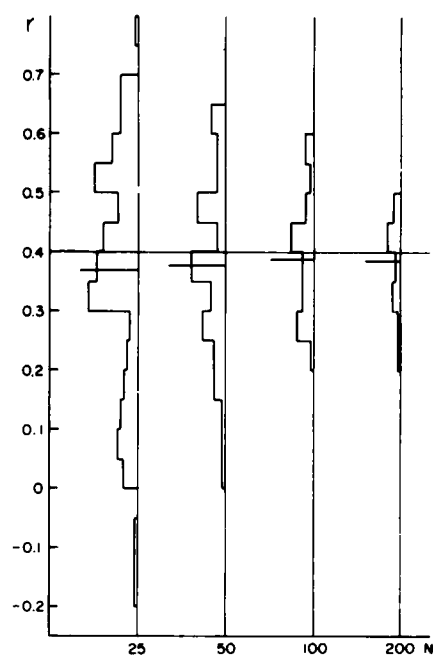


図 4・2-5(c)

標本相関係数の頻度分布と平均値
($\rho = 0.6$)

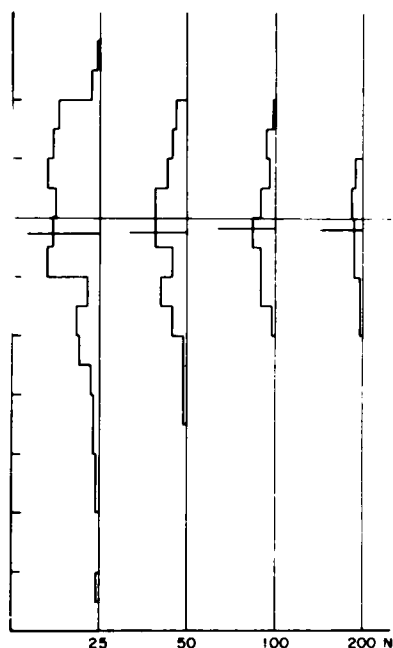
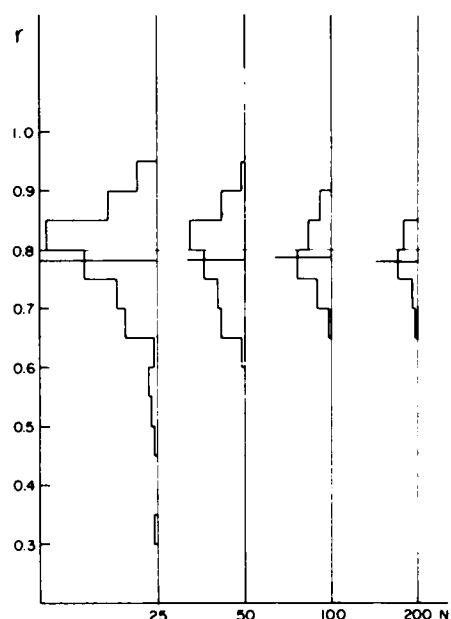


図 4・2-5(d)

標本相関係数の頻度分布と平均値
($\rho = 0.8$)



4・3 部分標本による母数推定値の検討

4・3・1 部分標本の選び方

前述した 3・3・4 の理論を使い，全標本のうちの一部分の上位標本のみで母数を推定し，仮定した母数との比較を行なった。

さて，部分標本としてつぎの 2 つを考えることにする。すなわち，1 つは一変量の上位標本しか得られない場合であり，他の 1 つは二変量とも上位標本が得られる場合である。たとえば， $\rho = 0.8$ ， $N = 100$ の才 1 組について，その部分標本の領域を示すと，図 4・3-1 および図 4・3-2 のよう

になり，相関母数の推定には黒丸の標本を採用している。なお，図 4・3-2 で○印の標本は周辺分布の推定のために黒丸の標本と共に用いた標本である。

図 4・3-1

部分標本の選定

(一変量の上位標本の場合)

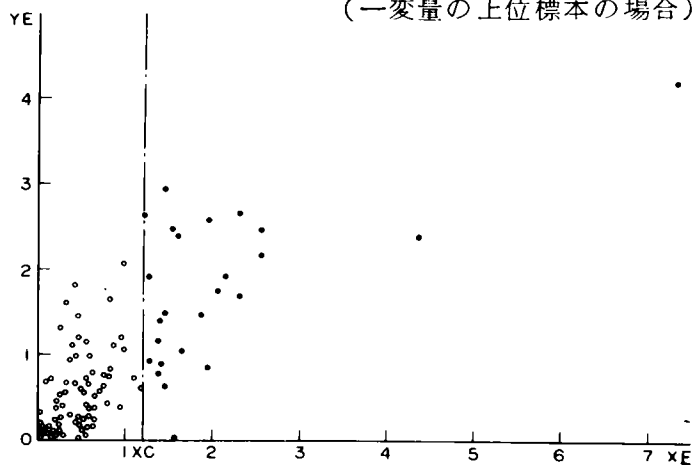
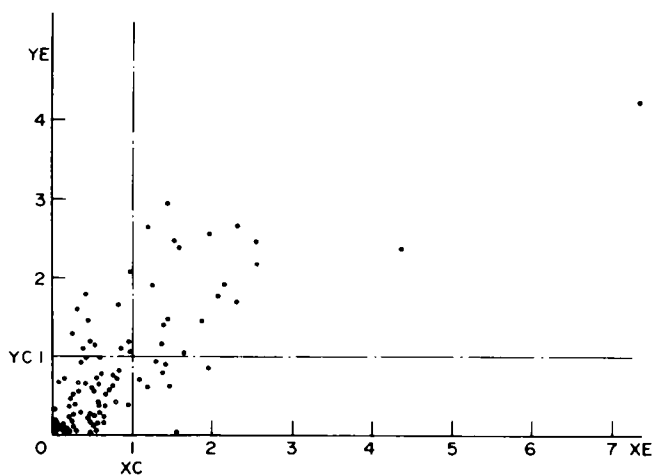


図 4・3-2

部分標本の選定

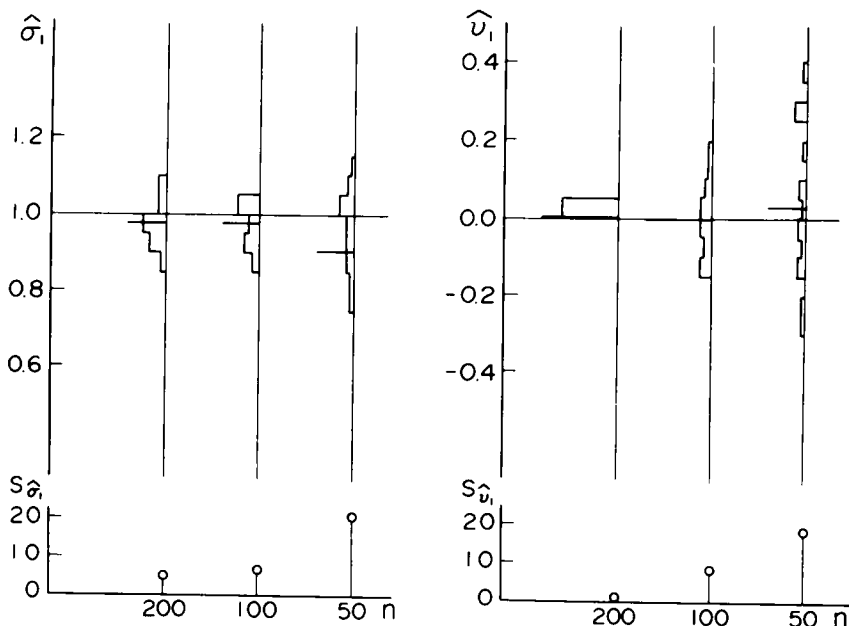
(二変量の上位標本の場合)



4・3・2 一変量の上位標本の場合

まず，図 4・3-1 に示したように X_E が X_C 以上の上位標本しか得られない場合にその周辺分布に関する母数，一般には， σ_1, ν_1 がどのように推定されるかを調べてみる。ところで，いまの場合前提として， $\nu_1 = 0, \sigma_1 = 1$ の標本を発生しているはずであるが，任意の ν_1, σ_1 の場合の部分標本に対する母数 σ_1, ν_1 の推定は (3・3-49) 式で求められる。 $\rho = 0.8, N = 200$ に対する計算結果を図 4・3-3 に，推定値の頻度分布，平均値，標準偏差を用いて示されている。予想されるように，部分標本数 n が全標本数 N に比べて小さくなると平均値は仮定値より離れ，かつ分散も大きくなるが，いまの計算ではほぼ $n/N \leq 1/2$ であれば推定精度は良好であるといえよう。

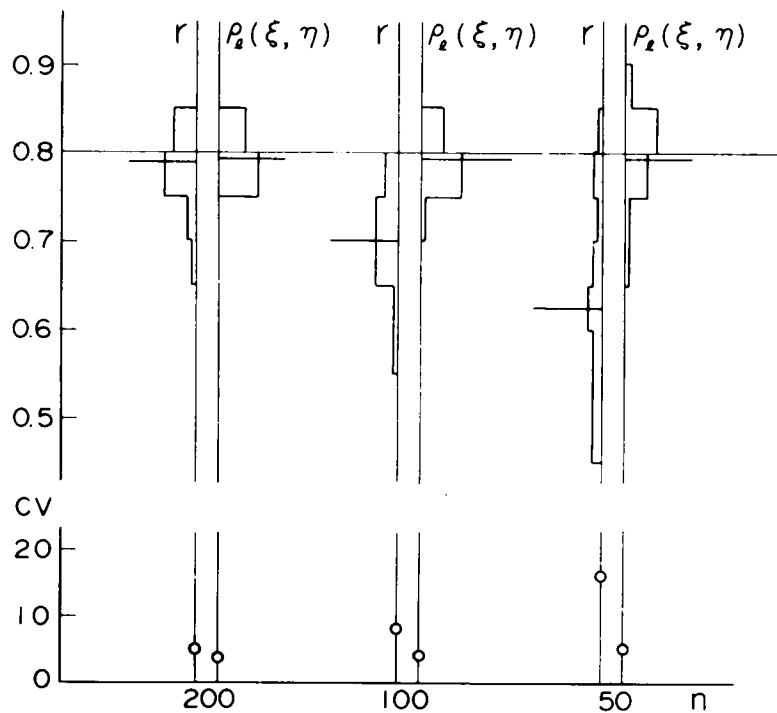
図 4・3-3 一変量の上位標本の σ_1, ν_1 の分布，
平均値，標準偏差 ($\rho = 0.8, N = 200$)



つぎに，このような部分標本による相関母数の推定値を調べてみる。最初に仮定したとおり，与えられた標本が $\sigma_1 = 1, \nu_1 = 0$ の完全に規準化された

ものであると考えた場合の最尤解 $\rho_e(\xi, \eta)$ および部分標本に対して通常の方法で求められた標本相関係数 r の頻度分布および平均値を、 $\rho = 0.8$ 、 $N = 200$ の場合について、図 4・3・4 に示している。すなわち、図は部分標本数 n の大きさに対応して、 $\rho_e(\xi, \eta)$ の変動（右側）と r の変動（左側）をヒストグラムと平均値で上側に、またその変動係数を下側に示したものである。

図 4・3・4 相関母数の推定値の分布，平均値，
変動係数（ $\rho = 0.8$ ， $N = 200$ ）



これをみると、部分標本 n が小さくなるにつれて当然変動係数は大きくなるが、最尤解は平均的にほぼ正しく ρ を推定しているといえる。

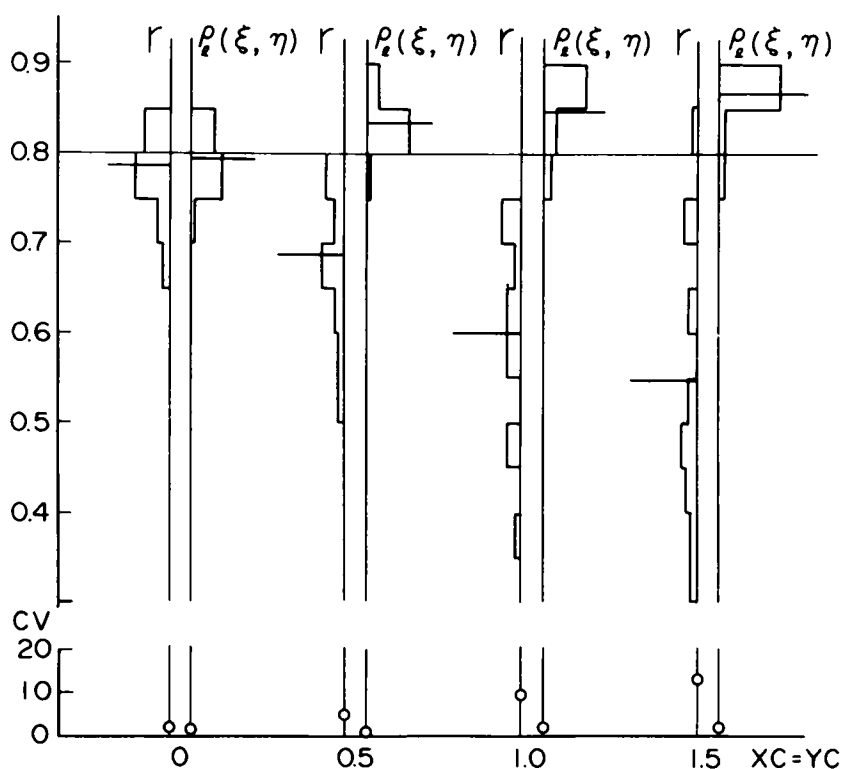
これに反して、標本相関係数 r は、 n の減少につれてその変動係数が急激に増加するのみならず、平均的にも相関母数から大きく離れてくる。したが

って、このような部分標本に対する相関母数の推定に標本相関係数を用いるのは、かなり問題があるように思われる。

4・3・3 二変量の上位標本の場合

ここでは、前出の図4・3-2に示したように、 X_E が X_C 以上かつ Y_E が Y_C 以上の上位標本しか得られない場合の、相関母数の推定結果を調べてみる。このために得られている部分標本はすでに完全に規準化された変量であると仮定した場合の最尤解 $\rho_c(\xi, \eta)$ と、部分標本に対する標本相関係数 r を前と同様に、頻度分布のヒストグラム、平均値および変動係数を $\rho = 0.8$ について示したものが図4・3-5である。

図4・3-5 相関母数の推定値の分布，平均値，
変動係数（ $\rho = 0.8$ ， $N = 200$ ）



図にみられるように，標本数が減少するにつれて，最尤解は仮定した母数に比して，次第に大きい推定値を与えるようになる。したがって，このような部分標本の選び方は，推定値の不偏性という点から好ましいものではないことがわかる。さらに，普通の標本相関係数から相関母数を推定することは，部分標本が少なくなれば，推定値の平均値が母数に比して急激に減少し，かつ変動係数も急激に増加することから，ほとんど困難であるといえそうである。

4・4 部分標本を全標本とみなした回帰特性の検討

つぎに，入手しうる標本として上位の部分標本しかなく，しかも全標本数も不明である場合を想定する。そのような場合，独立変数 X より従属変量 Y を推定するには，通常 $\hat{Y} = \bar{Y} + r (s_y / s_x) (X - \bar{X})$ の回帰特性が利用されるが，いまの二変数指数分布に従う上位の部分標本によって，この回帰特性が正しく推定されるか否かを検討してみる。

4・4・1 一変数の上位標本の場合

a. 理論的検討

上位の部分標本によって回帰特性を推定してみる。まず，標本 X としては総数 N の標本のうち X_C 以上の n コが既知で， (X, Y) は原点母数がともに 0，尺度母数 σ_1, σ_2 の二変数指数分布に従うものとする。全標本に対する X の周辺分布を $g(X)$ ， X, Y の同時分布を $f(X, Y)$ ， X を与えたときの Y の条件付分布を $f(Y | X)$ と記すことにし，上位標本から回帰特性に関係する統計量を検討する。

まず， X の周辺分布 $g(X)$ は，

$$g(X) = \frac{1}{\sigma_1} \exp\left(-\frac{X}{\sigma_1}\right) \quad (X \geq X_C) \quad (4.4-1)$$

また，標本比 n/N と標本下限値 X_C との関係は，大標本の場合，

$$\frac{n}{N} = \exp\left(-\frac{X_C}{\sigma_1}\right) \text{ あるいは, } X_C = \sigma_1 \log \frac{N}{n} \quad (4.4-2)$$

である。したがって， X_C 以上の標本 X の平均値 \overline{XC} はつぎのようになる。

$$\overline{XC} = \int_{X_C}^{\infty} X \frac{N}{n} g(X) dx = X_C + \sigma_1 \quad (4.4-3)$$

また， X_C 以上の標本 Y の平均値 \overline{YC} は

$$\begin{aligned} \overline{YC} &= \int_0^{\infty} Y \cdot \frac{N}{n} \int_{X_C}^{\infty} f(X, Y) dX dY \\ &= \frac{N}{n} \int_{X_C}^{\infty} g(X) \int_0^{\infty} Y f(Y | X) dY dX \end{aligned}$$

と書けるが，(2.4-6) 式より

$$\int_0^{\infty} Y f(Y | X) dY = E(Y | X) = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (X - \sigma_1) + \sigma_2$$

であるから，結局次式が得られる。

$$\overline{YC} = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} X_C + \sigma_2 = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (\overline{XC} - \sigma_1) + \sigma_2 \quad (4.4-4)$$

すなわち， \overline{YC} は \overline{XC} を与えたときの Y の条件付平均値となっている。

つきに，上位標本に対する X の分散 S_{XC}^2 は

$$S_{XC}^2 = \int_{X_C}^{\infty} (X - \overline{XC})^2 \frac{N}{n} g(X) dX = \sigma_1^2 \quad (4.4-5)$$

となり，全標本によるものと一致することが分る。また， Y の分散 S_{YC}^2 は

$$S_{YC}^2 = \frac{N}{n} \int_{X_C}^{\infty} g(X) \int_0^{\infty} (Y - \overline{YC})^2 f(Y | X) dY dX$$

で計算されるが， Y に関する積分は

$$\int_0^{\infty} (Y - \overline{YC})^2 f(Y | X) dY$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} Y^2 f(Y | X) dY - 2 \overline{YC} \int_0^{\infty} Y f(Y | X) dY + (\overline{YC})^2 \\
&= \left\{ 2 \sigma_2^2 (1 - \rho)^2 + 4 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} \rho (1 - \rho) X + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} \rho^2 X^2 \right\} \\
&\quad - 2 \overline{YC} \left\{ \sigma_2 (1 - \rho) + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho X \right\} + (\overline{YC})^2
\end{aligned}$$

となるから，結局つきのようになる。

$$S_{YC}^2 = \sigma_2^2 + 2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} \rho (1 - \rho) XC \quad (4.4-6)$$

したがって，一般にXCは正であるから，これは全標本に対する分散 σ_2^2 よりも一般に大きい分散を与えることになる。

さらに共分散 CV_c は

$$CV_c = \frac{N}{n} \int_{XC}^{\infty} (X - \overline{XC}) g(X) \int_0^{\infty} (Y - \overline{YC}) f(Y | X) dY dX$$

で計算される。ところで，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} (Y - \overline{YC}) f(Y | X) dY \\
&= \int_0^{\infty} Y f(Y | X) dY - \overline{YC} \\
&= \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (X - \overline{XC})
\end{aligned}$$

となるから，結局

$$CV_c = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{N}{n} \int_{XC}^{\infty} (X - \overline{XC})^2 g(X) dX = \rho \sigma_1 \sigma_2 \quad (4.4-7)$$

となり，これは全標本に対するものと同じである。

したがって，相関係数 r_c は次式

$$r_c = \frac{CV_c}{S_{XC} S_{YC}} = \frac{\rho}{\sqrt{2 \rho (1 - \rho) (XC/\sigma_1) + 1}} \quad (4.4-8)$$

のようになる。一般に， $0 < \rho < 1$ ， $XC/\sigma_1 > 0$ であるから， r_c は一般に ρ より小さい値を与える。また，回帰係数 β_c は

$$\beta_c = r_c \frac{S_{YC}}{S_{XC}} = \frac{CV_c}{S_{XC}^2} = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (4.4-9)$$

となり，全標本に対するものと一致することが分る。

最後に，以上の結果を用いると，上位標本に対する回帰直線の方程式

$$Y - \overline{YC} = \beta_c (X - \overline{XC})$$

は

$$Y - \sigma_2 = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (X - \sigma_1) \quad (4.4-10)$$

となり，全標本に対するものと同じになることが示される。

b. 数値実験による検討

以上の理論の検証を数値実験によって行なってみる。いま， $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ の標本を発生しているので，(4.4-3)，(4.4-4) の X ， Y の上位標本に対する平均値は， $N = 200$ の場合，つぎのようになるはずである。

$$n = 100 ; \overline{XC} = 1 + \log(200/100) = 1.6931$$

$$n = 50 ; \overline{XC} = 1 + \log(200/50) = 2.3863$$

また，たとえば $\rho = 0.8$ に対して

$$n = 100 ; \overline{YC} = 1 + 0.8(1.6931 - 1) = 1.5563$$

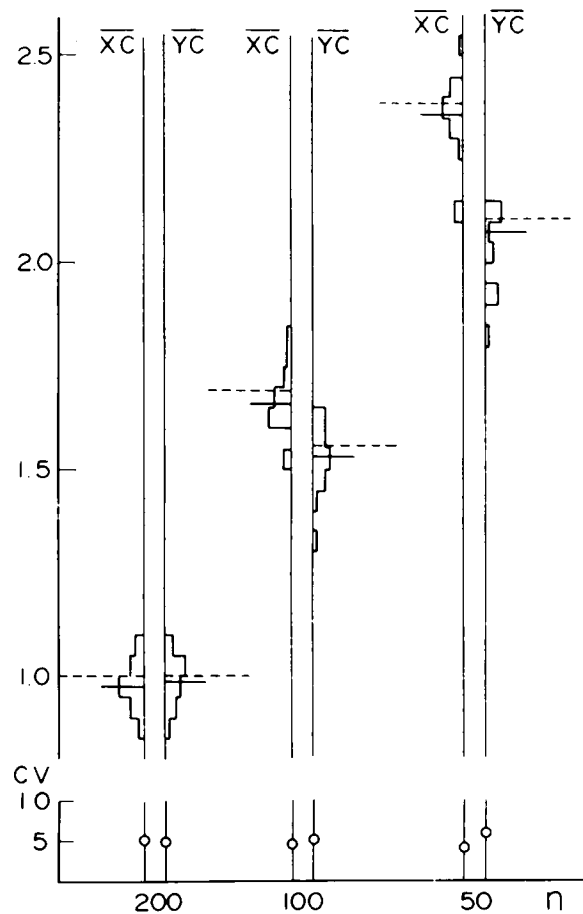
$$n = 50 ; \overline{YC} = 1 + 0.8(2.3863 - 1) = 2.1090$$

となるはずである。

この $\rho = 0.8$ ， $N = 200$ について，発生させた標本について \overline{XC} ， \overline{YC} の分布および平均値が図 4.4-1 の上側に，ヒストグラムおよび横実線で示され，下側に変動係数が併記されている。さらに， (X, Y) が $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ の指数分布に従うとした場合の理論的な平均値の位置が横点線で示され，これより発生された標本に関する平均値は理論値とほとんど差がないといえる。

図 4 - 4 - 1

一変量の上位標本による \overline{XC} , \overline{YC} の分布 ,
 平均値 , 変動係数



つきに , この標本から計算される標本相関係数 r_c および回帰係数 β_c を
 図 4 - 4 - 2 に示す。すでに検討したように標本相関係数 r_c は , 部分標本
 数 n が小さく , すなわち標本下限値 XC が大きくなるにつれて次第に小さく
 なるが , 回帰係数 β_c は , 平均的にみて n に無関係に , $\rho \sigma_2 / \sigma_1$ を推定してい
 ることは明らかである。ただし , n が小さくなるにつれて当然変動係数は大
 きくなってくる。

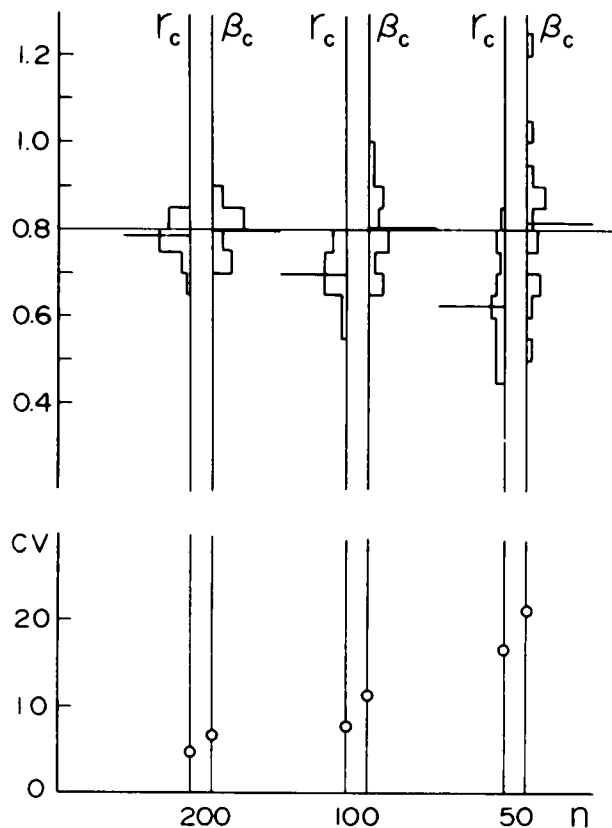
最後に , (4 - 4 - 10) 式より X を与えたときの Y の回帰曲線は , 理論的
 には , $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0.8$ に対して

$$Y = 0.8 (X - 1) + 1 = 0.8 X + 0.2$$

となるはずである。これに対して , 標本について , \overline{XC} , \overline{YC} , β_c の各 n に

図 4・4-2

一変量の上位標本による
 r_c , β_c の分布, 平
均值, 変動係数



ついでにの平均値を使って求めた回帰直線はつぎのようになる。

$$n=200 ; Y=0.7989 X+0.2043$$

$$n=100 ; Y=0.8060 X+0.1925$$

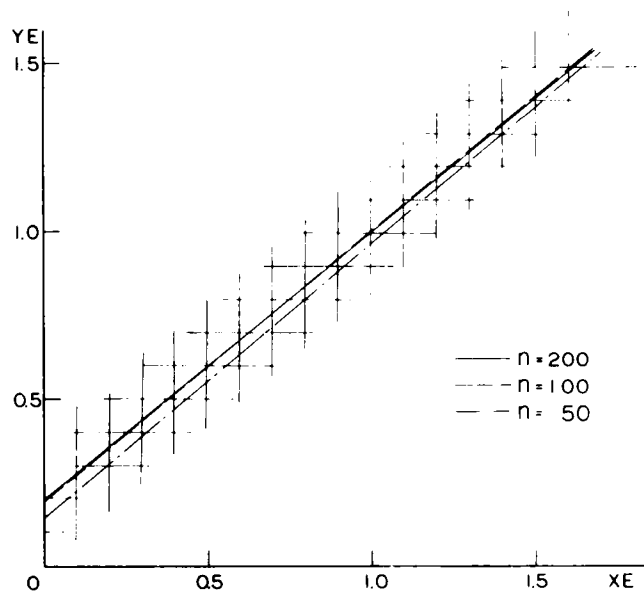
$$n=50 ; Y=0.8162 X+0.1493$$

これを示したものが図 4・4-3 であり, 上位標本による回帰直線で, n あるいは XC に無関係に, 全標本に対する回帰直線を推定し得るという理論的結果と一致することは明らかである。

図 4・4-3

一変量の上位標本
による回帰直線の
推定

($\rho = 0.8$, $N = 200$)



4・4・2 二変量の上位標本の場合

ここでは、 $X \geq X_C$, $Y \geq Y_C$ の範囲にある X , Y の標本を扱うが、この場合に、回帰特性を理論的に誘導することは難しい。そこで発生された標本から直接回帰曲線を求め、一変量の上位標本の場合と比較してみる。いま、 $X_C = Y_C$, $\rho = 0.8$, $N = 200$ の場合、 X , Y の平均値 \bar{X}_C , \bar{Y}_C の変動を図 4・4-4 に、相関係数 r_c , 回帰係数 β_c の変動を図 4・4-5 に示す。

さらに、 \bar{X}_C , \bar{Y}_C および β_c の n ごとの平均値を使って計算される回帰直線はつぎのようになる。

$$X_C = Y_C = 0 \quad ; \quad Y = 0.7989 X + 0.2040$$

$$X_C = Y_C = 0.5 \quad ; \quad Y = 0.7111 X + 0.4776$$

$$X_C = Y_C = 1.0 \quad ; \quad Y = 0.6386 X + 0.8155$$

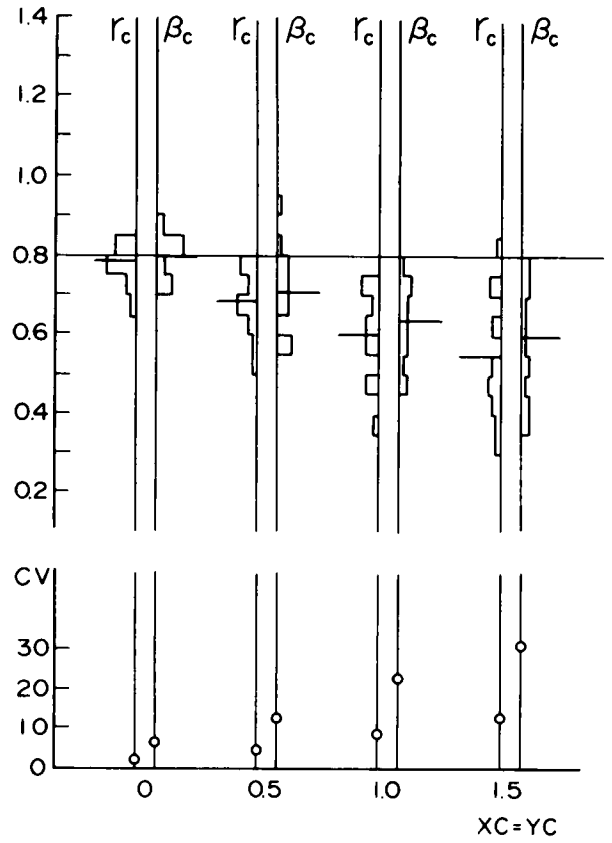
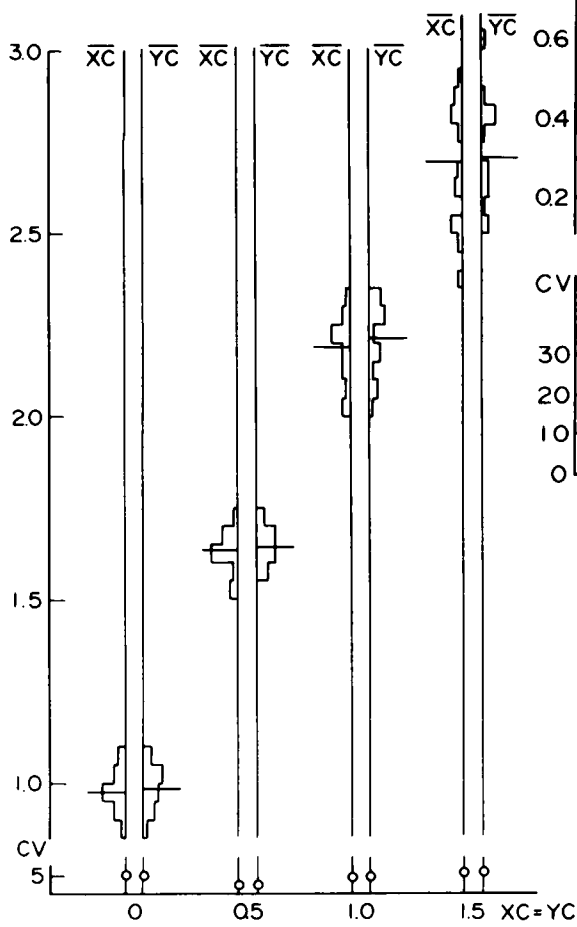
$$X_C = Y_C = 1.5 \quad ; \quad Y = 0.5976 X + 1.1003$$

図 4・4-5

二変量の上位標本による r_c ,
 β_c の分布 , 平均値 , 変動係数

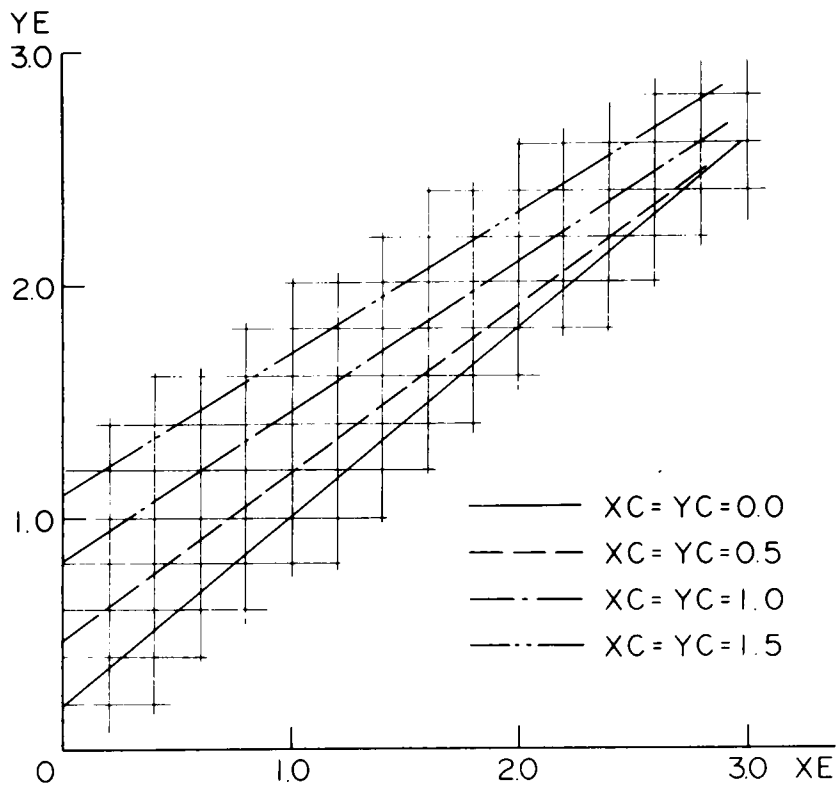
図 4・4-4

二変量の上位標本による \bar{X}_C , \bar{Y}_C
 の分布 , 平均値 , 変動係数



これを全標本より推定した回帰直線と比較すると図4・4-6のようであり， $XC=YC$ の増加とともに回帰直線の勾配は減少し， Y 切片は増大し，回帰直線による推定は急激に意味を失なうといえる。この理由として，二変量の上位標本では，任意の X を与えたときの Y の条件付分布の推定が， Y の下部標本の欠如によって正しく行なわれないことによることなどがあげられる。

図4・4-6 二変量の上位標本による回帰曲線の推定 ($\rho = 0.8$, $N = 200$)



4・5 正規化変数の相関特性との比較

4・5・1 理論的考察

二変数指数分布を使って発生させた統計資料と二変数正規分布を使って発生させたものの統計的性質の相違を知るために，4・2-1において発生された対の指数乱数と対の正規乱数の各々の相関特性についての比較を行なってみる。ここでは数値実験の結果を述べる前に，若干の理論的考察を行なっておく。

まず，二変数指数変量 $(X E, Y E)$ から二変数正規変量 $(X N, Y N)$ へ変換する場合を考え，それぞれを次式の規準化変量 (ξ_e, η_e) ， (ξ_n, η_n) で表わすことにする。

$$\left. \begin{aligned} \xi_e &= \frac{X E}{\sigma_{X E}}, & \eta_e &= \frac{Y E}{\sigma_{Y E}} & (X E, Y E \geq 0) \\ \xi_n &= \frac{X N - m_{X N}}{\sigma_{X N}}, & \eta_n &= \frac{Y E - m_{Y N}}{\sigma_{Y N}} \end{aligned} \right\} \quad (4.5-1)$$

ただし， m は平均値， σ は標準偏差で添字の e ， n はそれぞれ指数分布，正規分布を意味する。

さて， (ξ_e, η_e) から (ξ_n, η_n) への変換において，点 (ξ_e, η_e) の生起を指定変数 ξ_e の生起と， $\xi_e = \xi_e$ での条件付変数 $(\eta_e | \xi_e)$ の生起に分けて考えると，全体の変換は指定変数 ξ_e の ξ_n への変換と条件付変数 $(\eta_e | \xi_e)$ の $(\eta_n | \xi_n)$ への変換に分けられる。

ところで，変換の前後において変量の起りやすさは同一でなければならぬから，まず指定変数の変換では， ξ_e ， ξ_n の非超過確率が等しくなければならない。すなわち， ξ_e ， ξ_n の非超過確率 $F(\xi_e)$ ， $F(\xi_n)$ はそれぞれ

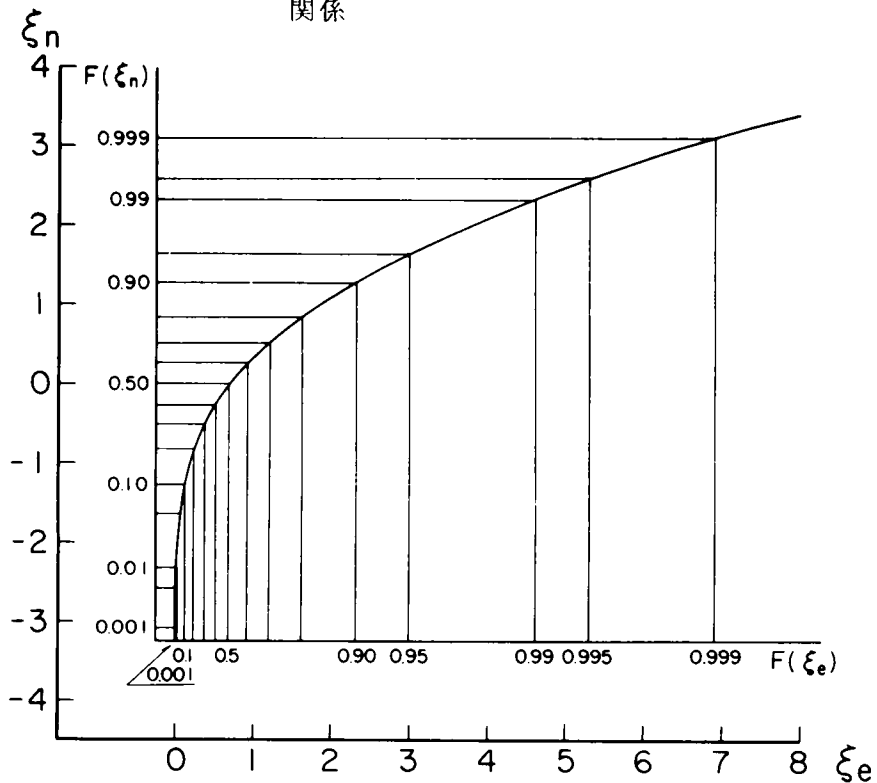
$$\left. \begin{aligned} F(\xi_e) &= 1 - \exp(-\xi_e) \\ F(\xi_n) &= \int_{-\infty}^{\xi_e} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \equiv \Phi(\xi_e) \end{aligned} \right\} \quad (4.5-2)$$

であるから， $F(\xi_e) = F(\xi_n)$ より

$$\xi_n = \Phi^{-1} [1 - \exp(-\xi_e)] \quad (4.5-3)$$

でなければならない。ただし Φ^{-1} は Φ の逆関数である。この関係は図 4・5-1 のようになる。

図 4・5-1 正規規準化変量と指数規準化変量の関係



つぎに条件付変数の変換においても，同様に $(\eta_e | \xi_e)$ ， $(\eta_n | \xi_n)$ の非超過確率が等しくなければならない。すなわち，

$$\begin{aligned} & F(\eta_e | \xi_e) \\ &= \int_0^{\eta_e} \frac{1}{1-\rho_e} \exp\left(-\frac{\eta + \rho_e \xi_e}{1-\rho_e}\right) \cdot I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho_e}}{1-\rho_e} \sqrt{\eta \xi_e}\right) d\eta \\ &\equiv F(\rho_e, \eta_e | \xi_e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & F(\eta_n | \xi_n) \\
 &= \int_{-\infty}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho_n^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\eta - \rho_n \xi_n}{\sqrt{1-\rho_n^2}} \right)^2 \right\} d\eta \\
 &= \Phi \left(\frac{\eta_n - \rho_n \xi_n}{\sqrt{1-\rho_n^2}} \right)
 \end{aligned} \quad (4.5-4)$$

であるから， $F(\eta_r | \xi_r) = F(\eta_n | \xi_n)$ より

$$\frac{\eta_n - \rho_n \xi_n}{\sqrt{1-\rho_n^2}} = \Phi^{-1} [F(\rho_r, \eta_r | \xi_r)] \quad (4.5-5)$$

あるいは

$$\Phi^{-1} [F(\rho_r, \eta_r | \xi_r)] = l_r \quad (4.5-6)$$

と記すと，

$$\eta_n = \rho_n \xi_n + \sqrt{1-\rho_n^2} \cdot l_r \quad (4.5-7)$$

でなければならない。

さて，いまの場合， ρ_r ， ξ_r ， η_r が既知であるから，(4.5-3)，(4.5-6) 式より ξ_n ， l_r は求められるが，(4.5-7) 式において ρ_n が未知であるために η_n を求めることはできない。

したがって，条件付変数の完全な変換は難しいと考えられるので，以下では，それを周辺分布の非超過確率に関して，変換前後で等しくなるように変換することにする。すなわち，次式の変換を用いることにする。

$$\eta_n = \Phi^{-1} [F(\eta_r)] = \Phi^{-1} [1 - \exp(-\eta_r)] \quad (4.5-8)$$

4.5.2 数値実験による検討

ここでは，発生された対の指数乱数および対の正規乱数の各々の相関について具体的な数値での検討を行なうことにする。

まず，図 4.5-2 は $\rho_r = 0.8$ ， $N = 25, 50, 100, 200$ の正規乱数間の相関係数 R_N の分布，平均値，変動係数を示し，図 4.5-3 は $\rho_r \equiv R = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ のそれぞれにおける $N = 25, 50, 100, 200$ に対する R_N の平均値と変動係数を指数乱数間の相関係数 RE のそれらと比較して示したものである。

図 4・5-2

二変数指数標本より二変数正規標本へ変換した場合の正規変量の相関係数の分布，平均値，変動係数

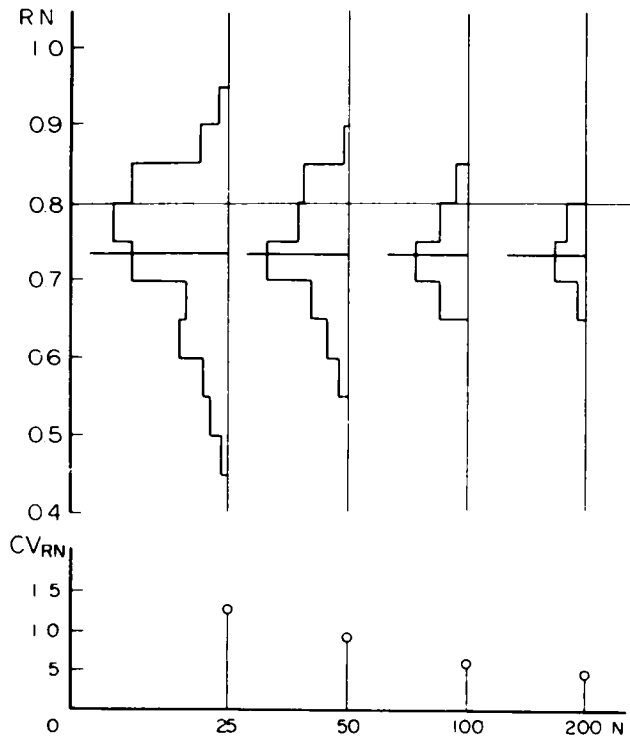
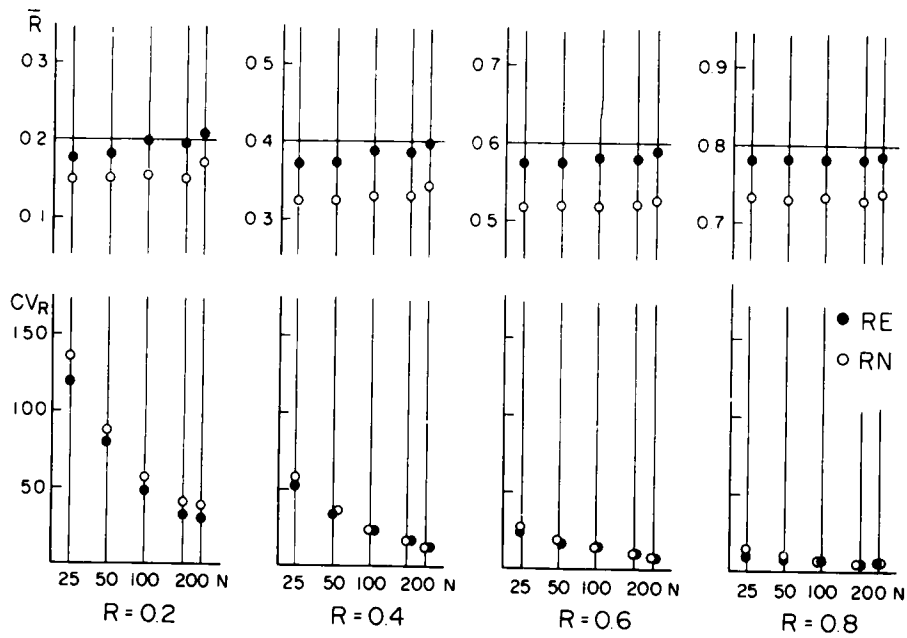


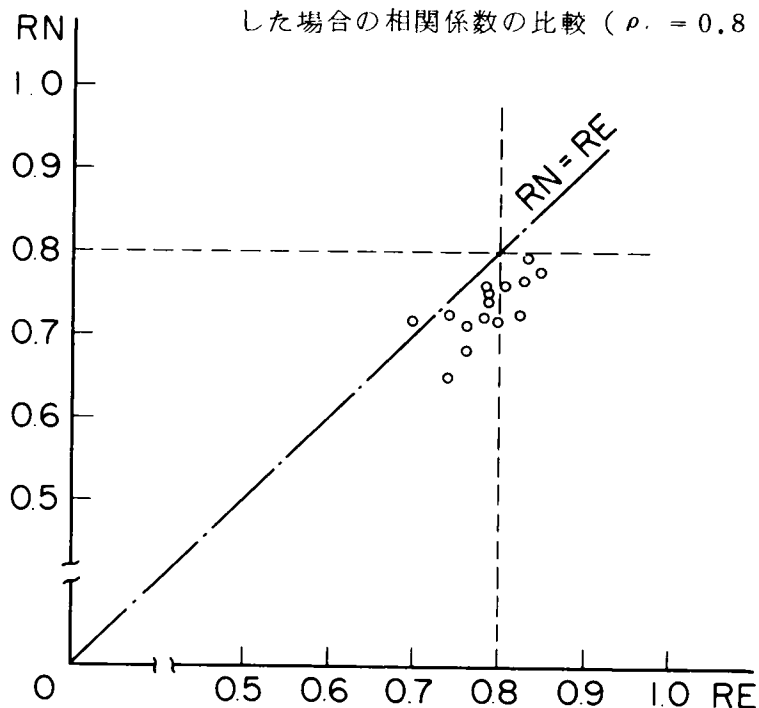
図 4・5-3

各 ρ_i に対する R_N, R_E の平均値と変動係数



また、図 4・5-4 は RE, RN の相対的な関係を $\rho_r = 0.8$, $N = 200$ の場合について表わしたものである。

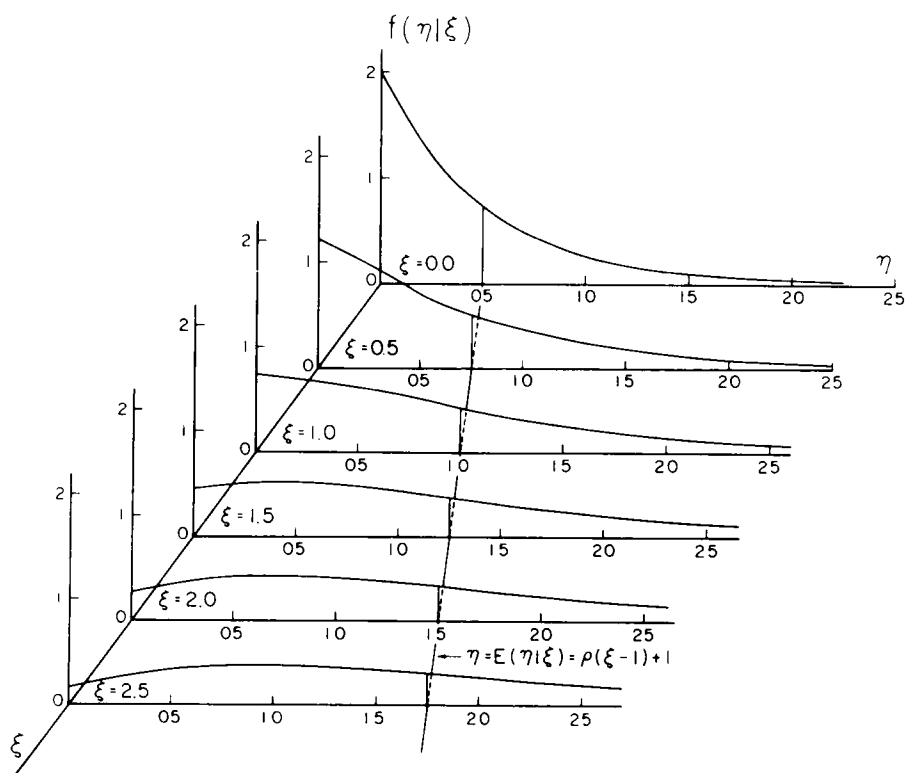
図 4・5-4 二変数指数標本から二変数正規標本へ変換した場合の相関係数の比較 ($\rho_r = 0.8$)



これらの結果より、いまのように指数変量から正規変量へ変換を行なえば、いずれも RN は RE より若干小さい値となるようである。この原因を調べるために、二変数指数分布における条件付平均値の軌跡、すなわち回帰曲線が変換によってどのような曲線に対応するかを検討してみる。

まず、二変数指数分布の回帰曲線は、(2・4-6) 式に示すように直線である。これを規準化変量を用いて表現すれば、直線の勾配が相関係数を表わすことになる。たとえば、図 4・5-5 は $\rho_r = 0.5$ の例を示したものである。二変数正規分布においても、一般に回帰曲線は直線となり、規準化変量で表示すれば、直線の勾配が相関係数と一致することは周知のとおりである。

図 4・5-5 二変数指数分布における回帰曲線 ($\rho = 0.5$)

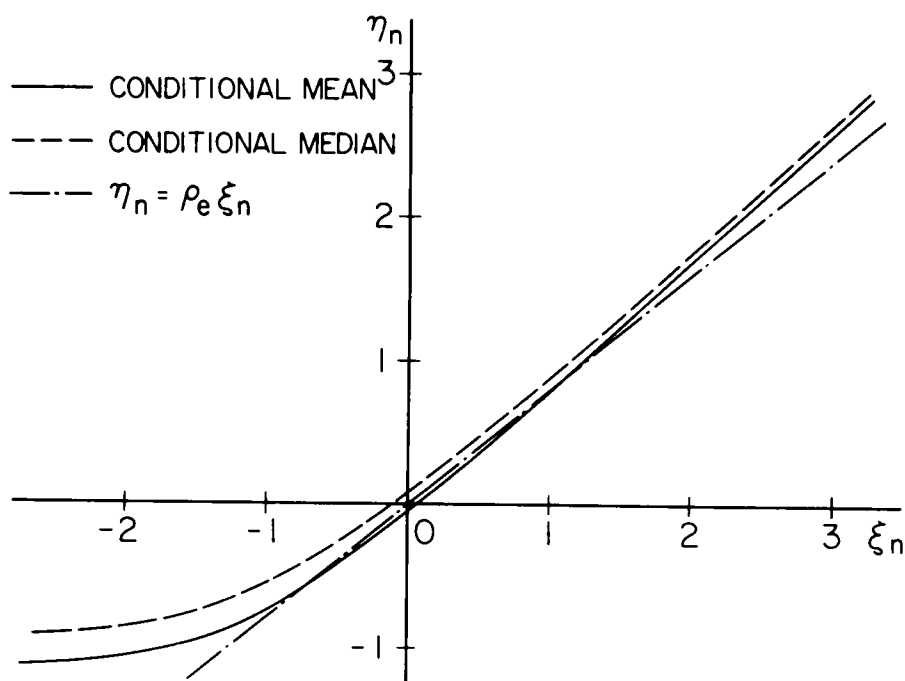


さて、図 4・5-6 の実線は、 $\rho_r = 0.8$ に対する変換後の回帰曲線を示したもので、また、破線 $\eta_r = \rho_r \xi_r$ は完全に二変数指数標本から二変数正規標本へ変換され、かつ $\rho_r = \rho_n$ が成立つと仮定した場合の回帰曲線である。これをみれば、変換後の回帰曲線は曲線となり、相関係数に相当する勾配は、 ξ_r が大きくなれば ρ_r より若干大きくなるが、 ξ_r が負でその絶対値が増すにつれて急速に 0 に近づくことになる。したがって、 ξ_r の対称性を考えれば ξ_r の全域における平均的な勾配として、 ρ_n は ρ_r より小さい値となることが予想される。さらに、同図に条件付中央値の変換後の曲線を点線で示したが、上記の傾向は全く同じである。また、この傾向は、 ρ_r を変えても同様に認められ、一般に変換後の ρ_n は ρ_r より小さくなるといえよう。

もちろん、これが成立するのは、 ξ_r のかなり広い範囲にわたって標本抽出が行なわれた場合であり、部分的な標本に対して必ずしも成立しない。

図 4・5-6

二変数指数標本より二変数正規標本へ変換した場合の回帰曲線，条件付中央値 ($\rho_e = 0.8$)



たとえば， $\rho_e = 0.8$ で，正の ξ_n に対して ρ_n を計算すれば ρ_e より大きいという結果が得られるであろう。

最後に，逆に二変数正規変量から二変数指数変量へ変換する場合について簡単に触れておく。すなわち，既出の図 4・2-1 に示したような手順を二変数正規乱数に適用し，それを二変数指数乱数に変換し，それぞれについて相関係数 R_N ， R_E を計算し，比較する。なお，この場合にも，前と同様に (4・5-3) 式，(4・5-8) 式を使って変換することにしておく。

図 4・5-7 は， $\rho_e = 0.8$ ， $N = 200$ に対する R_N ， R_E の関係を示したもので，この場合には，正規相関に比べて指数相関が小さくなっている。この原因として， $\rho_n = 0.8$ に対する変換後の回帰曲線（これは同時に条件付中央値の軌跡でもある）を示したものが図 4・5-8 の実線で，破線 $\eta_n = \rho_e (\xi_n - 1) + 1$ は変換が完全であり，かつ $\rho_n = \rho_e$ が成立つと仮定した場合の回帰直線である。この場合でも，変換後の回帰曲線は曲線であり，相関

係数 ρ_e に相当する勾配は、 ε_e が 0 にごく近い領域以外では ρ_n より小さく、その差は ε_e が大きくなるにつれて大になる。ところで、相関係数の値には ε_e の大きい値が支配的であるから、全体として ρ_e が ρ_n より小さくなってくるといえよう。この傾向は ρ_n を変えても同様に認められる。したがって、この場合には、変換前の正規相関に比べて変換後の指数相関が小さくなるといえる。

図 4・5-7 二変数正規標本より二変数指数標本へ変換した場合の相関係数の比較 ($\rho_n = 0.8$)

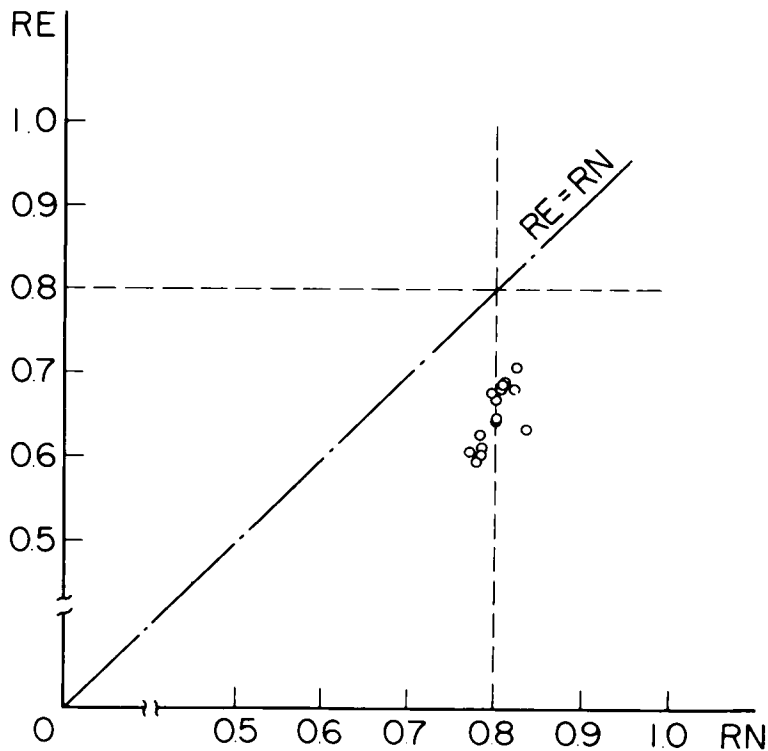
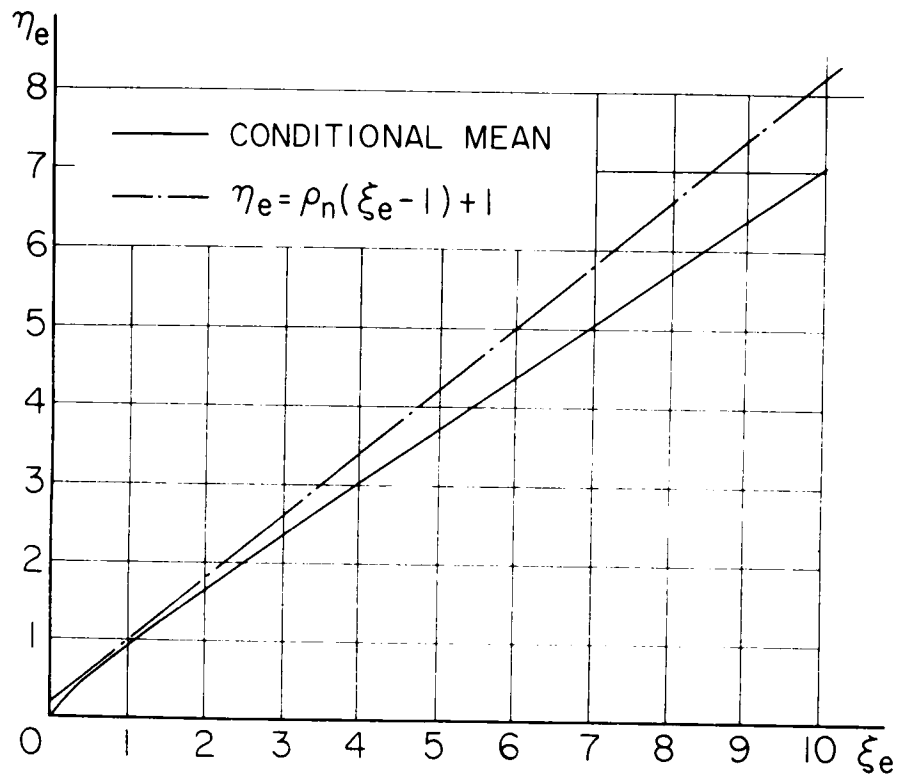


図 4・5-8 二変数正規標本より二変数指数標本へ
変換した場合の回帰曲線 ($\rho_n = 0.8$)



以上，各変量について周辺分布の非超過確率を変えないという条件で，二変数指数標本から二変数正規標本へ，あるいはその逆の変換を行なうと，変換前の相関係数に比べて変換後の相関係数は小さくなると結論できよう。

参 考 文 献

- 1) 垣尾忠彦；確率水文量推定諸法の適応性に関する研究，京大大学院工学研究科修士論文，昭45.3
- 2) J.T. Campbell；The Poisson correlation function，Proceeding of Edinburgh mathematical society，series 2，vol.4，1934，pp.18-46

第 2 編 二変数統計的手法の水工計画 への応用に関する 2, 3 の研究

第 1 章 水文資料の模擬発生に関する研究

1・1 水工計画における模擬発生手法の有用性

すでに緒論 2・2 で述べたように、洪水防御あるいは水資源の有効開発を目的として貯水池などの水工施設の合理的な配置計画・運用計画を策定するためには、まず、この水工施設を含む河川系が河川流量という入力に対応してどのような反応を示すかを適確に把握しなければならない。そのため近年、流入量や降水量などの長期間の水文資料を人為的に発生させ、反応の正確な理解に供しようとするいわゆる模擬発生手法および模擬発生資料に基づく流量シンセシス、あるいは両者を総合したシミュレーション手法の開発が試みられ、実用上の有効性が注目されつつある。むろん、このようなシミュレーション手法の基礎となるのは、現在入手しうる水文資料に内在する物理的な統計的情報であって、これを最大限有効に抽出して活用するための研究が重要視されねばならない。とくにわが国のように流量変動の激しい河川では、流量の時系列特性の把握が重要である。

さて、代表的な水工施設である貯水池について考えてみると、貯水池利用の内容は、当然その対象とする貯水池の規模によって異なる。しかし、とくにびわ湖のような大規模なものを除いたわが国のほとんどの貯水池の容量規模では、上記の流量時系列の情報のうちでも、経年的変動よりむしろ、1 年以内の時間的な変動特性、とりわけ季節的な変動特性が重要であるといえる。したがってここでは、わが国河川の季節的な変動特性について、時系列論的な立場からの考察を行ない、水文資料の模擬発生に関する基礎的な知見を得るとともにそれに基づいて模擬発生¹⁾の理論モデルについて若干の考察を行な

うこととする。

1・2 水文資料時系列のモデル化

いま，水文資料として河川流量の時系列に含まれる変動について考えてみると，この変動には，その時刻までの時系列情報によってほぼ一義的に予測し得る部分と，そうでない部分が存在するものと考えられ，一般に，前者を決定論的成分，後者を統計的または確率的成分と呼んでいる。この両成分の割合や各成分の性格が，資料の模擬発生のための理論モデルを考える上の鍵となることはいうまでもない。ところで，わが国の河川では，治水・利水のいずれにおいても，普通数日程度以下の流量が問題とされるが，この場合，両成分の割合を考えると，特別な場合を除いて，決定論的成分はあまり大きいものではない。そこで，普通，流量時系列をそのまま確率変量とした取扱いがなされることが多い。ここでもそのような考えで以下の議論を進めることにする。

1・2・1 年周期性の検出

1) 年周期性和地域特性

貯水池計画などのように，流量時系列の季節特性が問題になるような水工計画では，まず1年周期の卓越を確認しうるような流量時系列を標本系列として考えなければならない。従来，流量時系列の標本期間としては，こうした点はほとんど考慮されず，無批判に日，週，旬，月などの習慣上の単位が採用されてきたが，現象を正しく理解するには，その現象の大きさに相応した時間測度が採用されねばならないし，むやみに細かく（たとえば日単位など）標本を採ったとしてもそれだけ価値があるとはいえない。そこで，こうした検討のために，わが国のほぼ代表的な気候区²⁾における数地点での流量の観測値に基づいてコレログラムを吟味してみた。地点の概要は表1・2－1に示してあり，主な数値は建設省河川局編「多目的ダム管理年報」によっている。

表 1・2-1

流 量 資 料 の 概 要

地 方 名	河 川 名	地 点 名	流域面積 (km^2)	年平均日 流量(m^3/s)	標 本 期 間
北 海 道	幾春別川	桂沢ダム	1 5 1.2	6.6 4	1 9 5 7-6 2
東 北	胆沢川	石淵ダム	1 5 4.0	1 2.8 5	1 9 5 4-6 2
関 東	利根川	藤原ダム	4 0 1.0	1 8.1 7	1 9 5 7-6 2
"	赤谷川	相俣ダム	1 1 0.8	5.7 0	1 9 5 9-6 2
中 部	天竜川	美和ダム	3 1 1.1	1 4.5 1	1 9 5 8-6 2
近 畿	揖保川	引原ダム	4 8.2	3.8 6	1 9 5 9-6 2
"	紀ノ川	寺 尾	2 4 3.2	1 9.3 5	1 9 3 2-4 7
中 国	旭 川	湯原ダム	2 5 5.0	1 2.8 2	1 9 5 6-6 2
四 国	銅山川	柳瀬ダム	1 4 5.9	9.6 9	1 9 5 4-6 2

まず、日単位の総流量のコレログラム解析による結果について述べる。もちろん、標本として使用した統計期間が一定でないために定量的な比較は明らかでないが、定性的にみて、つぎのような3つの場合があることが明らかとなった。

a. 年周期が顕著に卓越する場合

これらは、北海道、東北および関東の北西部に位置する地点であり、年間における流量特性としては、融雪期間がかなり長期にわたる地域である。(図 1・2-1(a))

b. 年周期の存在が認められない場合

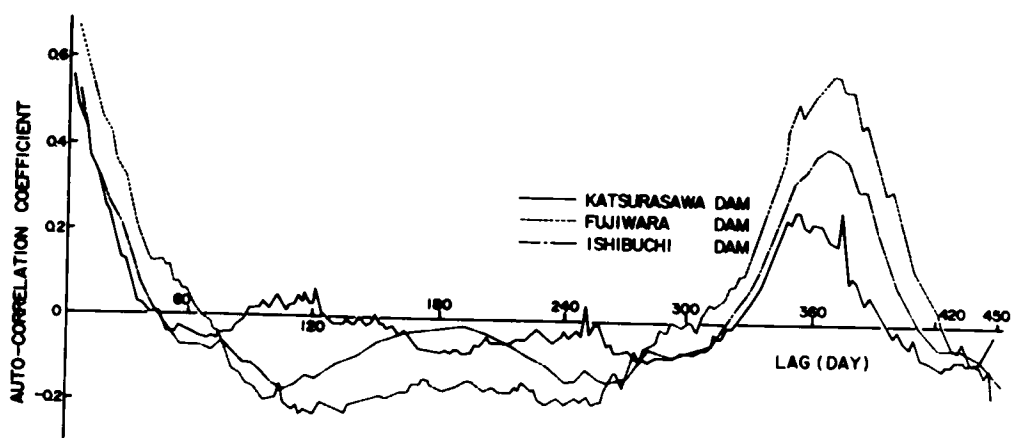
これらは近畿、瀬戸内沿岸、四国の地域で、梅雨および台風による降水量が多く、流量の安定性に欠ける地域である。(図 1・2-1(b))

c. 前の2つの中間的な場合

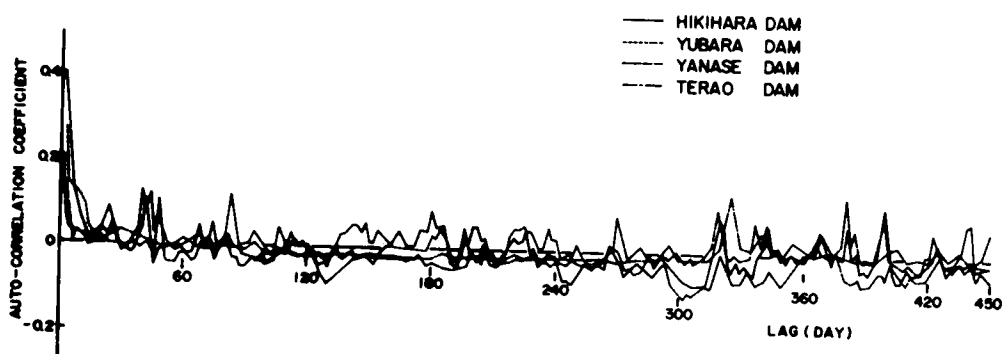
これらは上記a, b両地域の上に位置し、関東、東海の内陸山地にあり、比較的融雪期間が長く、また内陸であるために表日本的な冬期および夏期の渇水がかなり緩和されている地方である。(図 1・2-1(c))

図 1・2-1

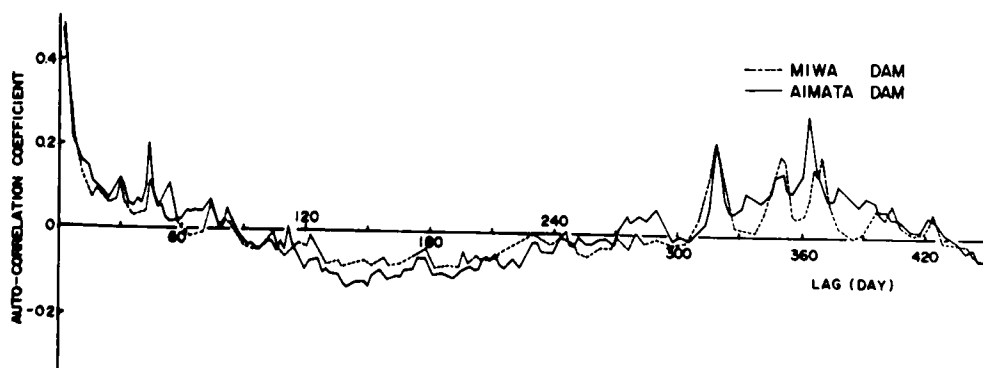
日総流量資料によるコレログラム



(a) 年周期の存在が顕著な場合



(b) 年周期の存在が認められない場合



(c) 中間的な場合

ところで、われわれは経験的にどの河川においても年周期性が存在するであろうことを予想し得るのであるが、このように流量時系列の特性には地域によって大きな差違がみられ、一般的な論議は困難である。そこで、つぎに、わが国でもっとも変動の激しい河川の例としてbの寺尾地点を選んで、さらに具体的に季節的特性を調べてみる。また、以上のコレログラムにおいて、1年以下ではどの河川でもそれほど顕著な周期の存在は認められないので、そのような短い周期は存在しないものとして以後の考察を行なう。

2) 最適標本期間の選定

一般に、流量系列は、ある期間内の総流量をとれば、期間が短ければランダム性が強くなり、逆に期間が月、季節というように長くなれば、個々の小さい変動は平滑化されてランダム性が減少して1年という水文量固有の周期が顕著になることが予想される。たとえば、前出のaの場合は、降水量の年間変動が少ないことに加えて、冬期の積雪によって河川流出量の変動が平滑化され、いわば移動平均されたことによって細かい変動が消去される。さらに換言すれば、標本期間が長くなったことによって年周期が表われてきたとみることができる。

いま、1日単位の総流量系列 x_t' が総数 T コあり、これを期間 ΔT ごと の $N = T / \Delta T$ コに分割すれば、 ΔT 期間内総流量の系列は、

$$Q_{\Delta T}(t) = \sum_{t'=(t-1)\Delta T+1}^{t\Delta T} x_{t'} \quad (t=1, 2, \dots, N) \quad (1.2-1)$$

となる。ただし、 t' をもとの1日間隔の時点、 t を ΔT 日間隔の時点としている。したがって $Q_{\Delta T}(t)$ の自己相関係数 $r_{\Delta T}(\tau)$ は次式で算出される。

$$r_{\Delta T}(\tau) = \frac{\frac{1}{N-\tau} \sum_{t=1}^{N-\tau} \{Q_{\Delta T}(t) - m_{\Delta T}\} \{Q_{\Delta T}(t+\tau) - m_{\Delta T}\}}{S_{\Delta T}^2} \quad \dots (1.2-1)$$

ここに、 m および S^2 は平均値および分散で、

$$m_{\Delta T} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Q_{\Delta T}(t) \quad , \quad s_{\Delta T}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \{Q_{\Delta T}(t) - m_{\Delta T}\}^2 \quad \dots (1.2-3)$$

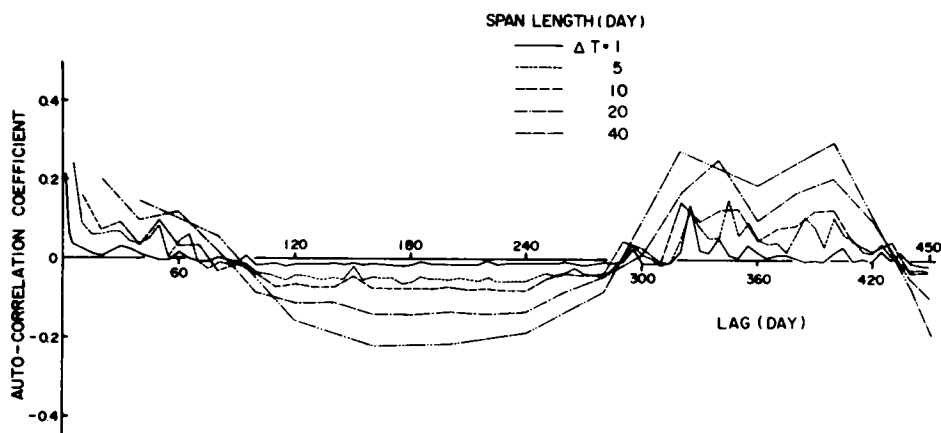
である。

さて、寺尾地点における昭和7年から16年間の資料を用いて、 $\Delta T = 1, 5, 10, 20, 40$ 日にとった場合の ΔT 期間内総流量の自己相関係数 $r_{\Delta T}(\tau)$ を τ として 1~450 日とした計算結果が図 1・2-2 である。

図 1・2-2

標本期間の相違による総流量コレログラムの変化

(寺尾, 1932-1947)



予想したように単位期間 ΔT が大きくなるにつれて、 τ の 365 日近傍でコレログラムは次第に極大値をとるようになり、その値も増大する。なお、コレログラムのピークは丁度 365 日付近に現われないで、若干その前後に現われる原因は、台風などの大きな総流量の出現の間隔が必ずしも 1 年間隔とはならず、かなりのばらつきがあることによるものと考えられる。

ところで、標本とする単位期間をどの程度に採れば年単位で季節性が保証されるかについては、相関係数の有為水準による検定に従った。すなわ

ち，標本相関係数 r は Fisher の z 変換

$$z = \tanh^{-1} r = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+r}{1-r}$$

によって，近似的に平均値 m_z ，標準偏差 σ_z

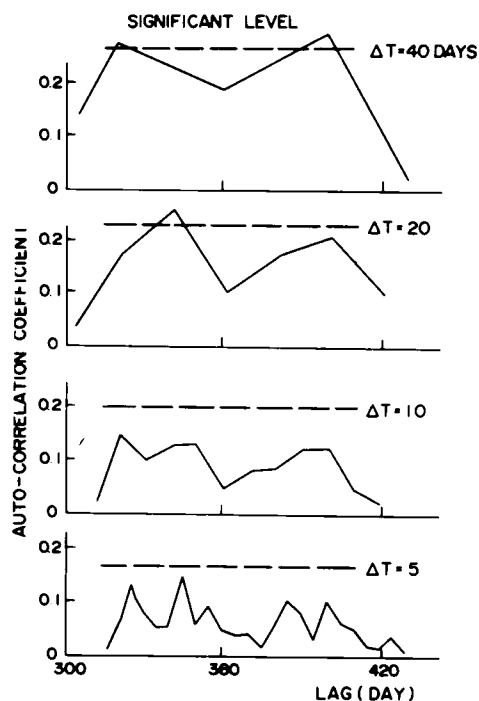
$$m_z = \tanh^{-1} \rho, \quad \sigma_z = 1/\sqrt{N-r-3}$$

の正規分布に従うことを用いた。³⁾ ところで普通この種の検定には母相関係数 ρ が 0 という帰無仮説を判定基準にすることが多いが，いまの場合実用上の便宜を考慮して，とくに $\rho \leq 0.1$ という仮説を危険率 5% で棄却検定した。計算結果は図 1・2-3 に示したとおりで，単位期間が 20 日以上あれば 1 年周期の存在が認められるようになる。すなわち年間の河川流出量の季節特性を的確に把握するためには，このような単位期間ごとの流量和を標本として用いた方が，たとえば毎日毎日の総流量を標本とした取扱より，むしろ目的に適った結果が得られるのである。

1・2・2 年間の季節分割

さて，以上のようにして 1 年という周期が顕著に認められるような流量時系列が採用されたが，つぎに，これを年間で幾つの特徴的な季節に分割する必要が生じてくる。現実の河川流量の変動には，大別して，1 年より長期に及ぶ経年変動と，年内の季節的変動があるが，経年変動成分によって年内の季節的変動が不明確にされている可能性もあると思われるので，これを除去するように考える。すなわち，流量系列を，

図 1・2-3 年周期性の検定



$$x_i(t) = \varepsilon_i(t) + \eta_i(t) \quad , \quad (i=1, 2, \dots, n; t=1, 2, \dots, N) \\ \dots (1 \cdot 2-4)$$

とおく。ただし， $x_i(t)$ は第 i 年の t 日目の流量， $\varepsilon_i(t)$ および $\eta_i(t)$ はそれぞれ $x_i(t)$ の経年変動部分およびそれからの偏差とし，流量の季節変動は $\eta_i(t)$ で表わされていると考える。

経年変動としては，長年月の周期に関して明確な結論が得難いところから，トレンド成分のみからなると仮定し，この影響を除去するために，トレンド成分で除したつぎの流量系列 $y_i(t)$

$$y_i(t) = x_i(t) / \varepsilon_i(t) = 1 + \eta_i(t) / \varepsilon_i(t) \dots\dots\dots (1 \cdot 2-5)$$

をもつてもとの流量系列 $x_i(t)$ の代りに用いる。また，トレンド成分は 1 年，すなわち，365 日の算術移動平均で近似できるものと仮定すると，たとえば第 i 年の中間の時点 $t = 183$ 日目の値は，次式で計算される。

$$\varepsilon_i(183) = \frac{1}{365} \sum_{t=1}^{365} x_i(t)$$

ここで，標本系列の年周期性を顕著にするために，前もって 1・2・1 の 2) で求めた最適単位期間で平均した $y_i(t)$ の平均値 $m_y(t)$ をあらためて標本として採用する。

ところで，季節変動といっても絶対的なものが存在するわけではなく，あくまで年間の経年変動に対する相対的なものと考えられるから，もとの流量系列 $x_i(t)$ で季節の変わり目になる時点のもっとも代表的なものは，経年変動に対して季節変動が無くなる時点，すなわち $\eta_i(t) = 0$ ，さらに換言すれば (1・2-5) 式より求めた $m_y = y_i(t)$ が単位量 1 を交切する時点であるといえる。この時点はいわゆる移動平均値としての季節分岐点であるが，種々実際の資料について検討してみると同時に移動標準偏差や移動自己相関係数の特性の顕著な変化のみられる時点でもある。したがって，この点を年間の非定常系列の主要な確率特性の分岐点とみることができ。

さて，計算の 1 例として，寺尾地点の昭和 8～11 年における $m_y(t)$ の

算出結果を図 1・2-4 に示す。これより、 $m_y(t)$ はトレンド除去によって各年ともかなり

図 1・2-4 年間の季節分割

類似した傾向がみられる。この 4 年間の平均値は太実線図 1・2-4 で記されており、これと $m_y(t)=1$ との交切によって、この場合年間の季節の分岐をほぼ、

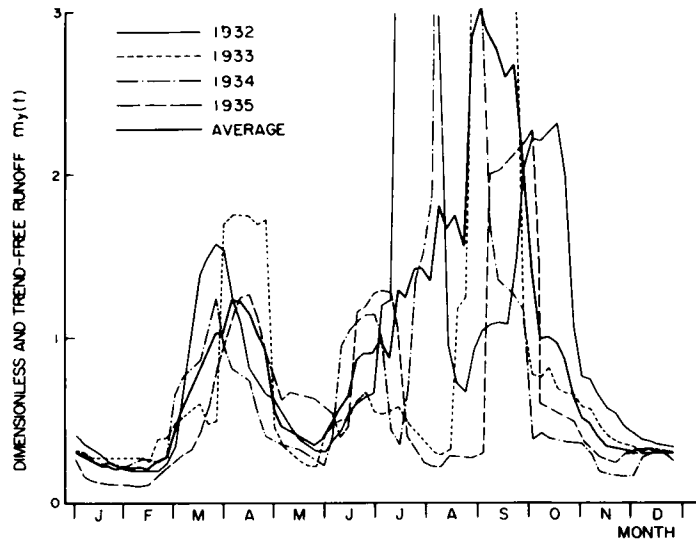
I. 10～3 月の晩秋・冬・初春期

II. 4 月の盛春期

III. 5, 6 月の晩春・梅雨初期

IV. 7～9 月の梅雨・台風期

の 4 期間で考えることができよう。



1・3 水文資料の模擬発生 of 具体的手法

1・3・1 基礎資料の抽出法

二変数統計の理論を応用して、水文資料の模擬発生を行なうということは、基本的には、二変数の資料に内在する統計的法則を見出し、それを資料のない領域に拡張して適用し、統計的に資料を作製することであるが、これには 2 つの場合が考えられる。

その 1 つは、たとえば、短期間の観測記録しかない観測所の記録を、それに隣接してしかも長期間に及んでいる記録と関連づけることによって長期間に拡張したり、あるいは欠測部の資料を補充したりする場合であり、他の 1 つは、1 地点における比較的短期間の観測記録を基礎にして、これを長期間に外挿してその資料を作成するような場合である。これら 2 つの

手法は単に模擬発生という言葉で現在混用されているが、基礎資料の抽出に対する考え方が若干異なるので、以後、前者を内挿的、後者を外挿的と呼び、区別することにする。

さて、模擬発生された水文資料が計画の基礎資料となりうるためには、つぎの安定性と再現性という問題が重要である。

1) 安 定 性

安定性とは、その統計的法則が抽出された標本期間を前後にずらせても、同じ統計的法則が見出されるか否かということで、主として外挿的模擬発生に関係する事項である。時系列論の立場からいうと、安定性には水文量時系列の非定常性、すなわちトレンドや周期性が関連する。このような非定常性の検出には従来数多くの研究が行なわれており、その成果が利用できよう。原則として、トレンドはできるだけ除去し、周期が認められればもっとも長周期の期間を標本期間に選ぶべきであるが、それについては、WMOでは、平年値の選定に過去30年間の平均値すなわち、1970年までの資料には1931～1960年の30年間、1971年以後の資料には1941～1970年の30年間の平均値を採用していることも、1つの目安になろう。また、水文量時系列には普通10年程度の周期が有意と認められる場合が多いから、10年ごとに区切った資料時系列から統計量を計算し、その差を χ^2 -検定などで調べ、同一母集団に属するとみなせる期間を採用することも考えられる。

2) 再 現 性

これは標本期間が確定した場合、どのように標本を選定し、かつどのような確率モデルを選べば母集団を適切に再現しうるかということで、内挿的・外挿的いずれの場合にも重要である。もちろん、これには模擬発生の目的が深く関係してくる。

たとえば、治水を目的とした堤防計画の場合には、洪水が対象であるから普通数時間～数十分間程度の短時間豪雨の再現が重要であり、雨量の少ない部分の再現はあまり重要でない。これに対して、利水を目的とした貯水池計画の場合には、普通数日～月程度の期間総流量が重要であり、流量のかなり広い範囲にわたる再現が要求される。すなわち、標本として何を

選び，それを表現する時間的尺度をどう採るかが重要である。

さて，このようにして標本が選定されると，最後にどのような確率モデルを選ぶかという問題が残される。これにはつぎの3つの内容が考えられる。

- (I) 二変数確率モデルの分布型の選定
- (II) 分布型に含まれる母数の推定
- (III) そのモデルを用いた模擬発生の手法

以上の詳細についてはつぎの1・3・2で立入って議論するので，概略の説明をするに止めておく。

すなわち，(I)では模擬発生すべき水文量が，二変数統計上，どのような分布型に従うかを判別して適当な分布型を決定することである。前にも述べたように，従来の模擬発生上の理論はほとんど二変数正規分布論に準拠しており，その適用には正規化の手続きが不可欠とされていた。しかしながら，正規化が困難な場合や他の分布型でもっと近似しやすいものがあれば，それにもっとも適切な分布型を選ぶべきであろう。

つぎに(II)では，分布型が確定した後において，その分布を表現するに必要な定数の推定である。これには，周辺分布に関する母数推定と相関母数の推定があり，さらに母集団全体から自由に標本が抽出できる場合と，標本抽出がある種の制限を受けた部分母集団からしか行なわれない場合の推定が問題となる。

また(III)は，実際に模擬発生の計算を実施していく際に，その確率モデルに相応した手法の開発である。普通の場合，計算は電子計算機を利用して行なわれることが多いが，計算機上での乱数の発生・検定およびその処理によって，ランダム項の影響の付加が重要な問題となる。

1・3・2 模擬発生の手法

さて，以上のようにして，水文量資料の選定およびその標本抽出が行なわれたとして，つぎに具体的に模擬発生を進める場合の手法を考えてみよう。

1) 二変数分布型の選定

これは、模擬発生の理論基礎として、二変数統計モデルにどのような分布型が適当であるかの選択である。いま、 i 時点における 2 つの水文量時系列を $x(i), y(i)$ とし、 $x(j)$ ($-\infty < j \leq i$) より $y(i)$ を推定する問題を考えると、 $y(i)$ が $x(j)$ の線型的な影響のみで表わされるとすれば、次式

$$y(i) = \int_{-\infty}^i r_{i-j} x(j) dj$$

で表現できる。ただし、 r_{i-j} は $x(j)$ より $y(i)$ への影響関数である。ところで、水文量時系列が離散的にしか観測されていなくて、 $y(i)$ に及ぼす $x(j)$ の影響が $j = i-1$ のみであり、さらにランダム項の影響を ϵ_i と記すと、上式は

$$y(i) = r_{i-1} \cdot x(i-1) + \epsilon_i \quad (1 \cdot 3 - 1)$$

のランダム性を考慮した線型回帰式となる。ただし、 r_{i-1} は $y(i)$ と $x(i-1)$ の間の回帰係数である。なお、上式でとくに $y(i) = x(i)$ とおいた次式

$$x(i) = r_{i-1} \cdot x(i-1) + \epsilon_i \quad (1 \cdot 3 - 2)$$

は、1 次の自己回帰過程または単純マルコフ過程といわれるもので、従来模擬発生モデルの基礎としてよく使われている。

さて、具体的に (1・3-1) あるいは (1・3-2) 式で模擬発生を行なうには、 $x(i), y(i)$ がどのような分布型に従うかを仮定しなければならない。なお以後、簡単に $x(i), y(i)$ は定常過程を考えておく。まず、従来考えられているのは、 $x(i), y(i)$ がそれぞれ $N(m_x, \sigma_x^2)$, $N(m_y, \sigma_y^2)$ である二変数正規分布に従うという仮定で、その場合 (1・3-2) 式中の係数は、周知のように、

$$r_{i-1} = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \epsilon_i = \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2} \cdot t \quad (1 \cdot 3 - 3)$$

となる。ただし、 ρ は母相関係数、および t は標準正規分布 $N(0, 1)$

に従う乱数である。

このモデルは、モデルに含まれる係数が、時点 ($i-1$) や時系列 $x(i-1)$ に独立な量として与えられるとともに、係数の推定・検定の理論的根拠が明確であるという長所がある。したがって、水文資料の模擬発生におけるほとんど唯一のモデルとして使用されてきたが、若干の問題点が考えられる。その一つは、二変量 x, y はあくまで正規分布に従うという前提であるから、実際の計算には水文量の正規化変換が必要である。これには種々の方法が考えられているが、一般にはかなり面倒な計算が要求され、ときには誤った結論を導く可能性すら持っている。もちろんこのような煩雑な変換を用いても必ずしも完全な正規化が可能とは限らない。たとえば、普通、短時間降水量の場合、降水量の小さい部分の正規化は困難であるといわれている。⁴⁾

通常、水工計画の基礎資料として数日程度以下の期間における降水量が採用されることが多いが、これらはガンマ分布または指数分布に近い分布性状を示すことが知られている。したがって、二変数ガンマ分布ないし二変数指数分布モデルとしての模擬発生が可能ならば好都合である。しかしながら、この方面の研究は従来ほとんど行なわれておらず、とくにその相関性の定量的表示その他未解明の点が少なくなかった。著者は、こうした問題を解明するための研究を進め、その成果を第1編で詳述したが、ここではその具体的な適用例について検討を行なってみたい。

2) 分布母数の推定

a. 周辺分布の母数推定

以下では、具体的に京都市西部、小畑川流域の1時間、10分間雨量の模擬発生およびその治水計画のための確率高水流量の推定への適用を試みた例について述べる。⁵⁾

まず、京都、小畑川の1967～1970における1時間で10mm以上、10分間雨量で5mm以上の日最大値を X (京都雨量)、 Y (小畑川雨量) とすると、 X, Y に対して第1編(3・3-29)式より無次元相乗平均 S 、無次元相加平均 T を算出し、第1編の図3・3-4および

図 3・3-5 の交点よりガンマ分布としての形状母数 ν を求めると、
 $\nu=0.2\sim 0.5$ となり指数分布 $\nu=1$ より著しく歪んだ非対称分布となる。
 そこで、実用上の便宜のためこの平方根変換した $x=\sqrt{X}$, $y=\sqrt{Y}$ について、以下に述べるように母数推定を行なって再度、 ν を調べると、
 $\nu=0.95\sim 1.05$ となり、十分指数分布として近似できることがわかった。

したがって、この x , y を原点母数 v_x , v_y , 尺度母数 σ_x , σ_y をもつ指数変量とすると、その規準化変量 η , ξ は次式

$$\eta = \frac{x-v_x}{\sigma_x}, \quad \xi = \frac{y-v_y}{\sigma_y} \quad (1 \cdot 3 - 4)$$

で与えられ、さらに、たとえば ξ の密度分布 $f(\xi)$, および累積分布 $F(\xi)$ は次式

$$f(\xi) = \exp(-\xi), \quad F(\xi) = 1 - \exp(-\xi) \quad (1 \cdot 3 - 5)$$

で簡単に求められる。

ところで、上述のように標本として上位の部分標本を用いているので、未知数母数 v_x , σ_x の推定には、第 1 編 (3・3-49) 式を利用すればよい。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \hat{v}_x &= x_{(N-n+1)} - \left(\log \frac{N}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=N-n+1}^N x_{(j)} - x_{(N-n+1)} \right) \\ \hat{\sigma}_x &= \frac{1}{n} \sum_{j=N-n+1}^N x_{(j)} - x_{(N-n+1)} \end{aligned} \right\} \quad (1 \cdot 3 - 6)$$

が用いられる。ただし、 $x_{(j)}$ ($j=N-n+1, \dots, N$) は小さい方から数えた j 番目統計量である。上式より、京都、小畑川の 1 時間および 10 分間雨量に対する母数を推定し、(1・3-5) 式に対する理論分布の超過確率 $1-F$ を求めるとともに、経験分布の超過確率を Thomas plot $1-F=i/(N+1)$ で表わしたものが、図 1・3-1, 1・3-2 である。なお、標本総数 N としては、標本に日最大値を採用しているの、資料

期間の総日数を用い，また，小畑川雨量としては，大原野，太閤担の観測値のうち大きい方を採用して代表雨量としている。

図 1・3-1

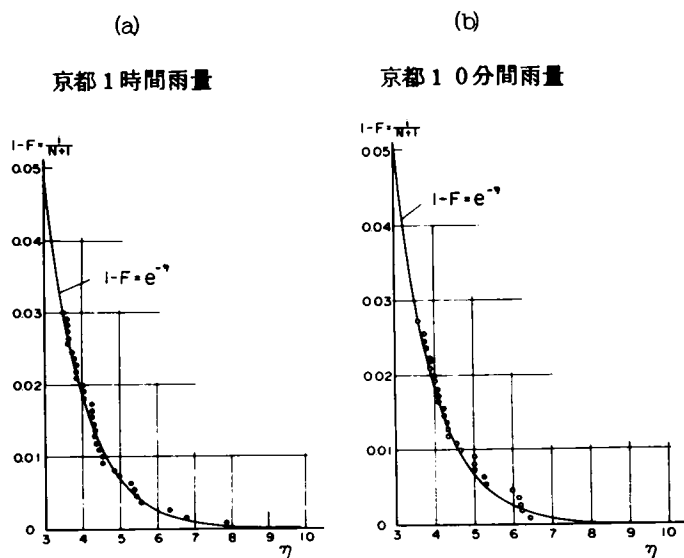
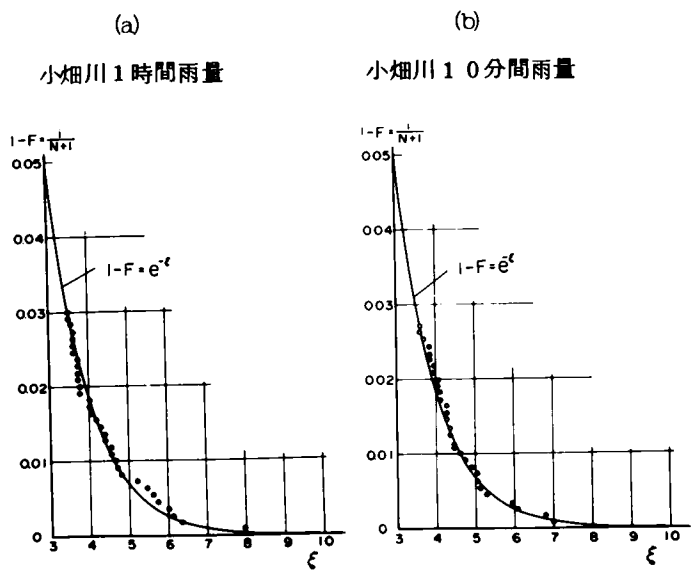


図 1・3-2



b. 相関母数の推定

以上によって京都雨量，小畑川雨量が規準化指数変量 η ， ξ で表現できたので，つきに η ， ξ の間の相関母数 ρ を推定する。これには指定変量 η の上位標本による推定として第 1 編（3・3—5 1）式，すなわち次式

$$\hat{\rho} = \frac{\overline{\xi\eta} - \bar{\xi}\bar{\eta}}{\sqrt{\eta^2 \bar{\xi} - \bar{\eta} \quad \bar{\xi}\eta + \bar{\xi}\bar{\eta} - \bar{\xi}\bar{\eta}}} \quad (1 \cdot 3 - 7)$$

が用いられる。ただし，上式でたとえば $\overline{\xi\eta}$ は， η の上位標本 $\eta_{(j)}$ ($j = N-n+1, \dots, N$) に対応した ξ を ξ_j と記すと，

$$\overline{\xi\eta} = \frac{1}{n} \sum_{j=N-n+1}^N \xi_j \eta_{(j)}$$

を意味する。さて，京都雨量と小畑川雨量に対して ρ を求めてみると，1 時間雨量で 0.956 と非常に相関が強いのに対し，10 分間雨量では 0.189 とかなり弱いことがわかった。

これは 1 つには，いまの場合標本値として降雨の成因を考慮せず 5mm / 10 分以上のすべての資料を採用したが，これには雷雨のように局地性の強いものがかかなり含まれているため，結果として相関性が低くなったものと考えられる。したがって市街地排水のためにはこのような資料の選び方でもよいが，河川計画のためには，さらに要因別の分類をして豪雨型の資料だけを標本値に選んだ方が合理的と考えられる。ただ小畑川流域での雨量観測期間は極度に短かすぎるため，ここでは前述のような資料抽出法をとった。

3) 模擬発生の手法

a. 条件付非超過確率

以上によって，二変数指数型モデルに含まれる定数がすべて明らかになったので，長期間の資料が得られている基準地点雨量より対象地点雨量を外挿的に模擬発生させることができる。ところで，計算に際して，

二変数指数型モデルと二変数正規型モデルの相違として以下の事柄を、あらかじめ理解しておく必要がある。⁶⁾

すなわち， x ， y の分布に二変数正規分布が適用される場合には，基準地点雨量 x を与えて対象地点雨量 y を推定するには，前記の（１・３－１）および（１・３－３）式より次式を用いればよい。

$$y = \bar{y} + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) + \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2} \cdot t \quad (1 \cdot 3 - 8)$$

ただし， t は $N(0, 1)$ の正規乱数である。

これに対して，二変数指数分布の場合には，上式に対応して第１編（２・４－６），（２・４－７）式より形式的に次式が適用される。

$$y = \bar{y} + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) + \sigma_y \sqrt{(1 - \rho)^2 + 2\rho(1 - \rho)x/\sigma_x} \cdot \varepsilon \quad (1 \cdot 3 - 9)$$

上式中の ε は（１・３－８）式の t に対応する確率変数であるが，もはや ρ ， x に無関係な規準化変量では表現できない。すなわち ε は， x を指定した場合の y の条件付非超過確率 $F(y|x)$ によって定まる変量となるから，結局，推定値 y は， $F(y|x) \equiv F(\xi|\eta)$ の関数として次式で与えられる。

$$y = y\{F(y|x)\} \equiv y\{F(\xi|\eta)\} \quad (1 \cdot 3 - 10)$$

なお，上式右辺の $F(\xi|\eta)$ は，第１編（２・４－１１）式で定義されたものであり，すでに巻末の表 ２・１～２・９として各種の ρ ， η および F の値に対する ξ の値として，数表にまとめられている。これらの関係を概念的に示したものが図 １・３－３である。すなわち，二変数指数型モデルを使った模擬発生では $F(\xi|\eta)$ の数表が基礎になることがわかる。

図 1・3-3

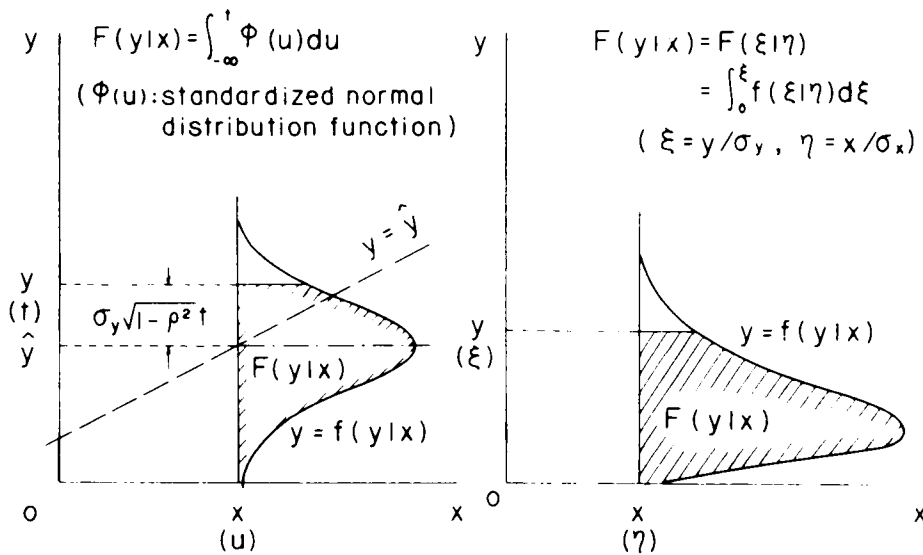
二変数正規分布と二変数指数分布に対する条件付非超過確率の概念

(a)

(b)

$$f(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y|x}} \exp\left(-\frac{(y-\hat{y})^2}{2\sigma_{y|x}^2}\right) \quad f(y|x) = \frac{1}{\sigma_y(1-\rho)} \exp\left(-\frac{y}{\sigma_y(1-\rho)} - \frac{\rho x}{\sigma_x(1-\rho)}\right) \times I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}}\right)$$

$$\hat{y} = \bar{y} + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$



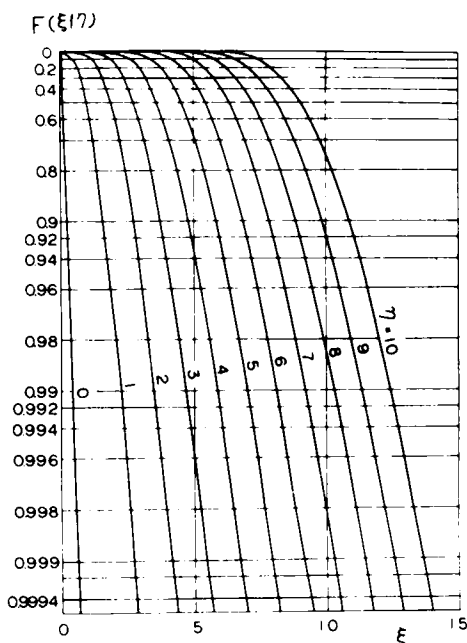
b. 模擬発生の手順

つぎに模擬発生の手順を具体的に説明する。まず32年間にわたる京都雨量 X を、推定された母数 μ_x, σ_x を用いて (1・3-4) 式で標準化変量 η に変換する。ついで、区間 $(0, 1)$ の一様乱数を選定し、これを (1・3-10) の $F(\xi|\eta)$ に等しいとおき、与えられた ρ および η に対する ξ を数表から内挿して求める。最後に、 ξ を推定母数 μ_y, σ_y を用い y さらに Y に変換すれば、結局、京都雨量 X に対する小畑川雨量 Y が発生されたことになる。

また、実際の計算では、前に得られた ρ の値に対して、標本や計算上の誤差を考慮して、1時間雨量で $\rho = 0.9$ ，10分間雨量で $\rho = 0.2$ を採用している。たとえば、 $\rho = 0.9$ に対する一様乱数 $F(\xi|\eta)$ と主な ξ, η の関係は図 1・3-4 のようである。

さて、 $F(\xi|\eta)$ に使用する一様乱数の選定として考えると、二変数指数分布の条件付非超過確率 ($\rho=0.9$)

これは一様性の検定すみの乱数表より選べばよいが、資料数のあまり多くない場合、資料数に比較して異常に大きいまたは異常に小さい値が含まれることは、模擬発生の目的からみて好ましいことではない。この問題に関して現在のところ定説はないが、ここではつぎのような乱数選定を行なった。すなわち、京都気象台における短時間豪雨資料として前と同じ基準（1時間10mm以上あるいは10分間5mm以上）を満す日数を1938～1969年の32



年間にわたって選出すると215日となる。そこで、簡単な目安として、215個の標本から得られる最大値に対する Thomas plot による超過確率 $1/(215+1) \div 0.005$ を基準とし、条件付非超過確率として0.005未満あるいは $1-0.005=0.995$ を超過するものは除外することにした。すなわち、一様乱数として0.005～0.995の3桁の乱数が215連続するものを選んで使用した。

4) 模擬発生資料の適用

以上のようにして模擬発生された水文資料の治水計画への適用例として、上記小畑川雨量に基づき、確率雨量さらに確率高水流量の推定を述べる。

a. 確率雨量の推定

まず、模擬発生された小畑川雨量資料から年最大値の分布を推定する。さて、いままでの計算過程からみて、模擬発生された小畑川規準化雨量 ξ は、指数分布に従うことは明らかである。一方、指数変量のある値以

上の上位標本（上位標本数／全標本数＝ n/N とする）から得られた最大値の分布は標本数が大きい場合，Gumbel の極値分布に漸近するという角屋の理論結果⁷⁾より，平均的な確率年 T に対する小畑川規準化雨量 ξ_T は次式

$$\xi_T = \xi_0 + \sigma' \alpha \quad (1 \cdot 3 - 11)$$

ただし，

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= v' + \sigma' \log \frac{n}{N} \\ \alpha &= -\log \left(\log \frac{T}{T-1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1 \cdot 3 - 12)$$

で与えられることになる。なお，上式中の v' ， σ' の推定については前と同様に行なえばよい。最後に，この ξ を（1・3－4）式によって y に，さらに Y に変換することによって確率年 T に対する小畑川の確率雨量が求められる。表 1・3－1 はその計算結果を示したものである。

表 1・3－1 小畑川流域 確率雨量の推定

確率年 T	1 時 間 雨 量		10 分 間 雨 量	
	ξ_T	$Y_T(\text{mm})$	ξ_T	$Y_T(\text{mm})$
100	10.286	114.8	9.134	53.2
50	9.651	100.6	8.268	41.8
20	8.803	83.1	7.113	28.7
10	8.148	70.7	6.220	20.3

b. 確率高水流量の推定

さて，洪水時の流量観測および流出解析によって流域の流出特性が明確な場合には，上記の確率雨量に基づいて，与えられた確率年に対する現状での高水流量をつぎのようにして推算することができる。

すなわち，いわゆる特性曲線法による流出解析法が利用できるとすると，高水の最大流量に關与する有効降雨の継続時間 t_{pc} とその間の平均

有効降雨強度 r_{mp} との間に次式が成り立つことが知られている。⁸⁾

$$t_{pc} \cdot r_{mp}^{1-p} = K \quad (1.3-13)$$

ただし，上式中の係数 p ， K は高水流出に関する流域特性値で，流域が指定されれば定数と考えてよい。上式の r_{mp} (mm/hr) がわかれば，懸案地点の高水最大流量 Q_p (m³/sec) は，当然，次式で求められる。

$$Q_p = \frac{1}{36} r_{mp} \cdot A \quad (1.3-14)$$

ここに A は流域面積 (km²) である。

たとえば，小畑川流域左支川の下狩川（流域面積 1.03 km²）では，

図 1.3-5 の丸印で

示したような $t_{pc} \sim$

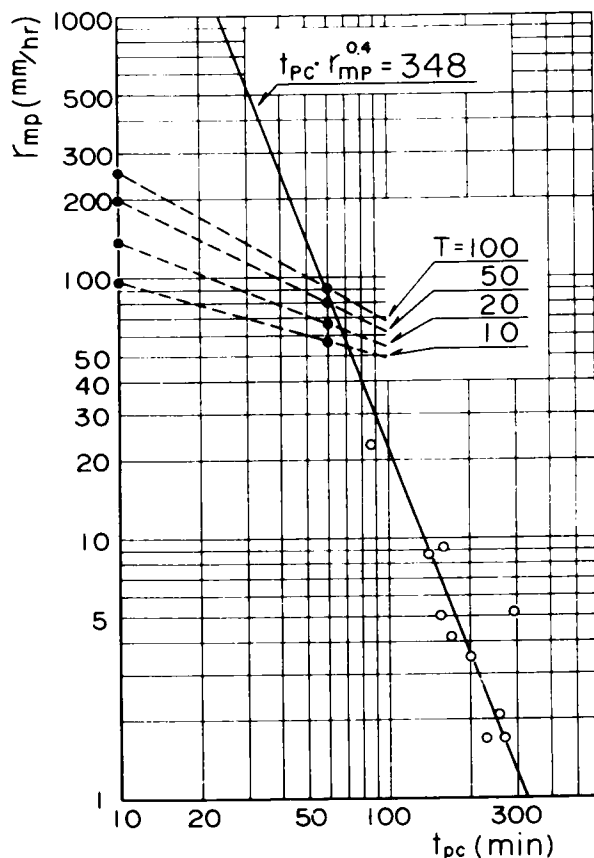
r_{mp} 関係が得られてい

る。そこで従来の解析結果より，一応 $p=0.6$ と仮定し最小自乗的に求めた (1.3-13) 式に対応する関係式が，図に実線で示してある。

さらに，既往の解析結果より流出率を 80% と仮定し，表 1.3-1 の確率雨量より有効雨量を求め，図 1.3-5 に記入すると黒丸のようになる。図で同じ確率年に対する黒丸を連ねた点線は，いわゆる Sherman 型の降雨波型を意味し，した

図 1.3-5

下狩川確率降雨波型の推定 (○ 実測流域等特性，・ 計算降雨波型)



がって、実線と点線の交点が流域の $t_{pc} \sim r_{mp}$ 関係を満足し、かつ、与えられた確率年に対応する有効降雨強度 r_{mp} を与えることになる。最後に、こうした求められた r_{mp} を (1・3-14) 式に用いることによって必要な確率年に対する高水流量が推定される。表 1・3-2 は下狩川流域における計算結果を整理したものである。

表 1・3-2 下狩川確率高水流量の推定

確率年 T	r_{mp} (mm/hr)	t_{pc} (min)	Q_p (m ³ /sec)
100	92.0	58.5	26.3
50	78.5	62.0	22.5
20	64.0	67.5	18.3
10	54.0	71.5	15.4

参 考 文 献

- 1) 石原安雄・長尾正志；流出量時系列の季節的特性について，京都大学防災研究所年報，第12号B，昭和44年3月，pp. 261-272.
- 2) 資源調査会；日本の水資源，日本の資源問題第2編，1961，pp. 20-22.
- 3) たとえば，中山伊知郎編集；統計学辞典，東洋経済新報社，1951，pp. 878-880
- 4) 鈴木栄一；気象統計学，地人書館，pp. 10-15.
- 5) 長尾正志・角屋睦；二変数ガンマ分布とその適用に関する研究(4)
—短時間降雨の模擬発生—，京都大学防災研究所年報，第14号，昭和46年3月.
- 6) 長尾正志・角屋睦；二変数ガンマ分布とその適用に関する研究(1)
—二変数指数分布の基礎理論—，京都大学防災研究所年報，第13号B，昭和45年3月，pp. 105-133.

- 7) 角屋睦；水文統計論，水工学シリーズ 64-02，土木学会水理委員会，1964，7，pp. 8-9
- 8) 土木学会編；水理公式集，昭和38年，p. 36.

第2章 水系の安全性と洪水処理施設の 操作・配置に関する研究

2・1 治水計画問題の二変数統計的处理

ここでは，治水計画の計画規準のあり方を，二変数の正規分布の理論に基づいて論議し，次節2・2以下で具体的な統計処理手法について考察したい。

まず，治水計画の根本の目標は流域内の洪水被害の防止・軽減であるから，計画基準として，想定される被害額の確率的期待値に着目することにする。したがって，種々の計画案としてけ，起りうる期待被害額が一定となるようなものを選び，これらの案相互間では治水効果は共通として，他の面，たとえば計画実施に伴う経済・社会的な面からの検討を行なって，最終案を決定するわけである。この期待被害額の内容を具体的に表現するとつぎのようになる。

いま，計画基本量が x, y であるとする。さらに x, y についてその生起の密度分布関数を $f(x, y)$ ，被害関数を $D(x, y)$ とすると， x, y 平面内の点 (x_0, y_0) で表わされる計画案に対する期待被害額 $E(x_0, y_0)$ は，次式で与えられる。

$$E(x_0, y_0) = \iint_{x, y} D(x, y) f(x, y) dx dy \quad (2 \cdot 1 - 1)$$

つぎに，これを従来とられていた一変数的な考えと比較してみよう。まず従来の被害額の算定では，普通， x と y の間の独立性を仮定した，いわゆる一変数統計としての被害期待額の和 E' ，すなわち次式で考えられていた。

$$E'(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{\infty} D_1(x) g(x) dx + \int_{y_0}^{\infty} D_2(y) h(y) dy \quad (2 \cdot 1 - 1')$$

ただし， $D_1(x)$ ， $D_2(y)$ はそれぞれ x ， y に関する被害関数， $g(x)$ ， $h(y)$ はそれぞれ x ， y の周辺分布の密度関数である。

さて，(2・1-1)式の右辺の積分範囲は，領域Ⅰ ($x \geq x_0$ ， $y \geq y_0$)
Ⅱ ($x \geq x_0$ ， $y < y_0$)およびⅢ ($x < x_0$ ， $y \geq y_0$)に分けられるが，とくに領域Ⅰにおける被害関数の内容を次式

$$D(x, y) = D_1(x) + D_2(y) + D_3(x, y) \quad (2 \cdot 1 - 2)$$

のように書けたとする。ここに， $D_1(x)$ ， $D_2(y)$ は(2・1-1')式と同様でそれぞれ x ， y のみに関する被害関数， $D_3(x, y)$ は x および y の両方に関係するものを意味する。(2・1-2)式を(2・1-1')式に代入することによって，次式が得られる。

$$E(x_0, y_0) = E'(x_0, y_0) + \int_{\text{I}} D_3(x, y) f(x, y) dx dy$$

したがって，従来とられてきた一変数統計的な被害額評価と二変数のそれとの相違は，上式でみられるように，計画基本量を同時に超過するような高水が生じた場合の被害内容が，単独で超過した場合のそれぞれの和とどれだけ相違するかという点にあるということができる。

ところで，各高水要因の種々の大きさに対する被害額を正確に推定することは現実にはかなり困難な問題である。そこで，被害を生ずるような確率のみに着目した基準がよく用いられる。すなわち，計画を超過する高水群の生起確率を一定とするような計画案を検討材料にするという考えである。いまの例では，このような超過確率 $1 - F(x_0, y_0)$ は，次式

$$1 - F(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{\infty} g(x) dx + \int_{y_0}^{\infty} h(y) dy - \int_{x_0}^{\infty} \int_{y_0}^{\infty} f(x, y) dx dy \quad (2 \cdot 1 - 3)$$

または，非超過確率 $F(x_0, y_0)$ は

$$F(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} f(x, y) dx dy \quad (2 \cdot 1 - 3')$$

で表現できる。

したがって、密度分布 $f(x, y)$ の関数形がわかれば、当然周辺分布 $g(x)$, $h(y)$ がわかるから、(2・1-3) 式によって超過確率を計算することができる。

たとえば、 x, y が二変数正規分布に従う場合を考える。 x, y をそれぞれ規準化変量 ξ, η に変換すると、 (ξ, η) の密度分布は第1編 (1・2-3) 式で与えられるから、計画案 (x_0, y_0) に対する超過確率は次式のように計算される。ただし ρ は相関係数で、 ξ_0, η_0 はそれぞれ x_0, y_0 に対応する。

$$\left. \begin{aligned} 1-F(x_0, y_0) &= 1 - \int_{-\infty}^{\eta_0} \varphi(\eta) \Phi\left(\frac{\xi_0 - \rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) d\eta \\ \text{ここに} \\ \varphi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \quad \Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \varphi(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 1 - 4)$$

したがって、一般に (2・1-3) 式による超過確率の計算は、たとえば (2・1-4) 式のような積分を行なうことによって計算は可能であるが、実際の演算にはかなりの労力を要する。そこで、さらに簡便な手法として、高水の生起頻度に着目する方法が考えられる。すなわち、

$$f(x_0, y_0) = \text{const.} \quad (2 \cdot 1 - 5)$$

のように確率密度の等しくなるような高水群を検討の対象として選定し、その後超過確率や期待被害額などを調べて、最終的な判断を下すことになる。この方法では、各種の判断は後に廻されるが、二変数正規分布の場合に検討材料になる高水群が比較的容易に計算できる。すなわち、 ξ, η が二変数正規分布に従う規準化変量であるとする、(2・1-5) 式に対応して、

$$\xi_0^2 - 2\rho\xi_0\eta_0 + \eta_0^2 = \text{const.} \quad (2 \cdot 1 - 6)$$

で表現される高水群 (これは ξ, η 面内で長円となる) が比較対象になるわけである。以後、このような考えに従って具体的に治水計画基準のあり方に

ついて考察してみたい。¹⁾

2・2 水系の安全性の確率的評価

ここでは，流域の内部に一つの洪水調節用貯水池を有し，下流に一つの堤防区間で護られた防災対象地域があるという最も単純な河川水系を想定し，水系全体での安全性に対する計画基準を確率的に推定することを考えてみる。

2・2・1 計画基本量による高水生起の確率表示

社会的要因を除外して考えれば，高水処理計画の対象としては，自然現象としての洪水規模が問題になり，その発生の不確定性を考慮すればこれを確率表示するのが合理的である。しかも，高水規模の表現としては，高水処理の手段に応じて高水波型のもつ種々の性質の中から直接関連する波型要素の中から計画基本量を選定すべきで，これら関係する基本量を同時に勘案することによってはじめて水系全体としての総合的な安全性の確率評価が可能となるわけである。

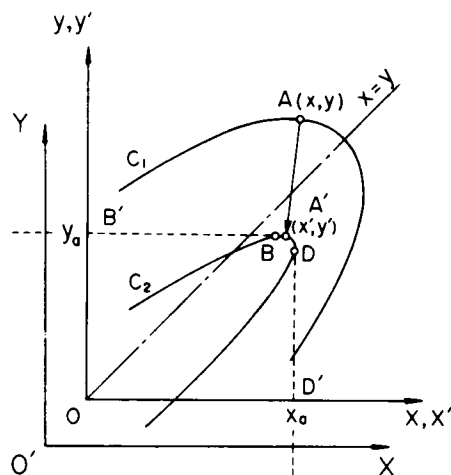
ところで，いずれの場合，水系内に洪水調節池と堤防とを含むが，それら防災用構造物が完全に計画施工されており，計画の対象外力の範囲内では破壊はないとすれば，高水処理能力の限界はその越流に対する関係，すなわち，調節池では貯留水量と洪水調節用容量との関係，堤防ではピーク水位（またはピーク流量）と天端高・巾員などの高水の疎通容量との関係によって定まるといえる。そこで確率論の立場からは，これら両方の関係を同時に考慮した二変数確率の理論を基礎として計画基準を策定していくことが必要とされる。

さて，計画基本量としての外力には，堤防区間の高水のピーク水位（またはピーク流量） H と，調節池地点における高水の総流量 V を考えると，このような高水波の生起確率は確率変量 H と V の同時生起確率として表現することができる。ところで，普通 H および V はそれぞれ適当な変数変換によって規準正規変量 x および y に変換できることが知られている。 x と

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)} \right\} \quad (2 \cdot 2 - 1)$$
$$x^2 - 2\rho xy + y^2 = (1 - \rho^2) C^2 \quad (2 \cdot 2 - 2)$$

图 2 · 2 - 1

さらに水系全体での計画高水は上式で与えられるような一連の高水群の中から選ぶものとするとき、この場合の任意の高水波 (x_0, y_0) に対する水系全体の超過確率は、既出の $(2 \cdot 1 - 4)$ 式によって計算できることは明らかである。



洪水調節池や堤防などの洪水処理施設が構築されると、洪水はそれ以前の状態のものに比べて変化するはずである。いま図 2・2-1 において、以前の状態に対応する曲線 C_1 上の $A(x, y)$ で表わされる高水波が処理によって、点 $A'(x', y')$ の波型に変化し、曲線 C_1 は全体として曲線 C_2 に移ったとしよう。この変化の様相は洪水処理の方法に種々異なるが、ここでは簡単につきの線型関係

$$x = a_0 + a_1 x' + a_2 y' \quad , \quad y = b_0 + b_1 x' + b_2 y' \quad (2 \cdot 2-3)$$

で表現できる場合を考えると，変化後の曲線 C_2 も長円となることが計算できる。長円 C_2 の中心を原点とする座標を新たに (X, Y) とすれば，変数 X, Y は一般に規準正規分布とはならないが，さらに以下のような ξ, η に変換し直すことによって規準正規化が可能である。ただし，相関係数 ρ は変換後は次式の R を使わねばならない。

$$\xi = \frac{X}{\sqrt{B/A^2}}, \quad \eta = \frac{Y}{\sqrt{A/B^2}}, \quad R = \frac{H}{\sqrt{AB}} \quad (2 \cdot 2 - 3)$$

ただし，式中の記号は，

$$\left. \begin{aligned} A &= a_1^2 - 2\rho a_1 b_1 + b_1^2 \\ B &= a_2^2 - 2\rho a_2 b_2 + b_2^2 \\ H &= (a_1 b_2 + a_2 b_1) \rho - (a_1 a_2 + b_1 b_2) \\ d &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned} \right\} (2 \cdot 2 - 4)$$

であり， C の大きさは変換後も不変である。

ところで，もとの x, y 面上で洪水処理が可能か否かを示す境界の曲線を C_d とすると，全水系での超過確率 $1 - F$ は次式

$$1 - F = \iint_{C_d}^{\infty} f(x, y) dx dy \quad (2 \cdot 2 - 5)$$

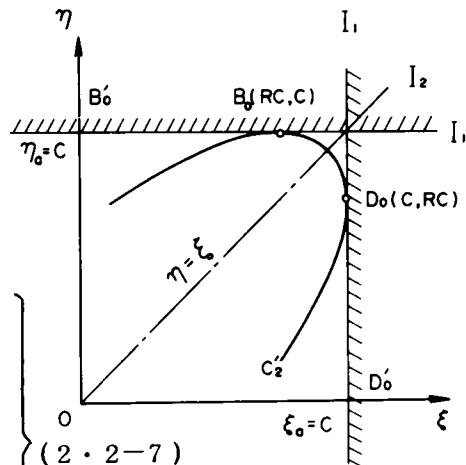
で与えられるが，この C_d が変換によって ξ, η 面で C_d' に移ったとする。変化後の超過確率 $1 - F'$ を計算するための密度分布 f' がもとの f と全く同じ形式で表現できることは，次式より明らかである。

$$\begin{aligned} f'(\xi, \eta) d\xi d\eta &= f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}} \exp \left\{ -\frac{\xi^2 - 2R\xi\eta + \eta^2}{2(1-R^2)} \right\} d\xi d\eta \\ &\quad \dots (2 \cdot 2 - 6) \end{aligned}$$

したがって，変化後の超過確率は $(2 \cdot 2 - 5)$ の C_d の代りに C_d' ，およ

2・2・3 洪水処理施設の治水機能の確率論的評価

图 2 · 2 - 2

洪水調節池による高水波の変形
に関する超過確率

ただし、

(2 · 2-7)

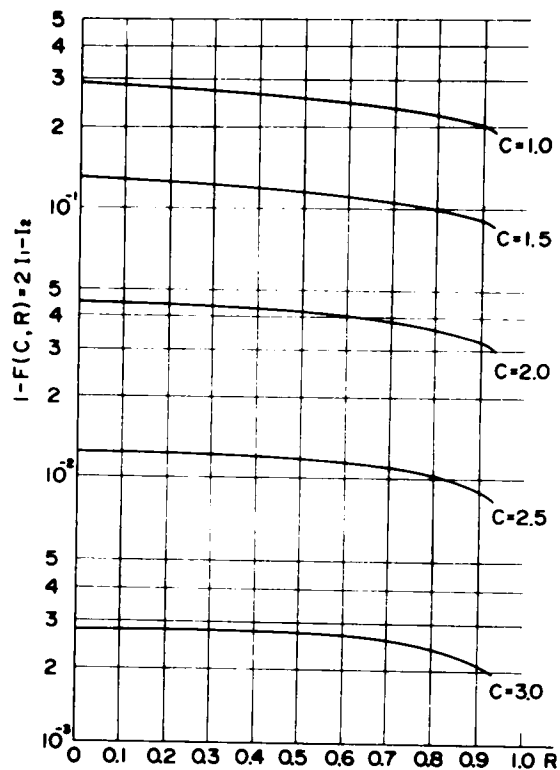
$$I_2 = \int_C^\infty \varphi(\xi) \left[1 - \Phi \left(\frac{C - R\xi}{\sqrt{1 - R^2}} \right) \right] d\xi$$

で、記号は (2・1-4) 式と同じである。この $1-F$ を、 C 、 R をパラメーターとして計算した結果が図 2・2-3 である。³⁾

図 2・2-3

R および C と $1-F(C, R)$ の関係

以上の結果を要約すると、
高水波型の要素間の相関係数 ρ 、計画高水の生起頻度に対する C の大きさ、および高水調節による変化の形がわかれば、式 (2・2-3)、(2・2-4) によって変化後の相関係数 R が求められ、さらにこの R を使って式 (2・2-7) あるいは簡単に図 2・2-3 によって高水処理後の超過確率が求められる。したがって、洪水処理前後の超過確率の増加分が、この洪水処理施設による水系の安全性の増加分として評価できる。



以上は、計画高水の選定を図 2・2-2 の確率長円 C_2' の全体について考えた場合であるが、これを従来のように 1 つの高水波型で計画する場合について触れておく。この場合、前と同様に高水波型の選定は確率長円 C_2' の上で行なえばよいが、その際洪水被害に対して危険側である弧 $B_0 D_0$ 間で考えておけばよい。したがって C_2' 上の任意の 1 点 (ξ_1, η_1) で堤防および調節池が計画されたとすると、

$$\eta_1 = R \xi_1 + \sqrt{1-R^2} \sqrt{C^2 - \xi_1^2}$$

であるから、(2・1-4) 式に対応する超過確率は次式で計算できる。

$$1 - F(\xi_1, \eta_1) = 1 - \int_{-\infty}^{R\xi_1 + \sqrt{1-R^2} \cdot C + \xi_1} \varphi(y) \Phi\left(\frac{\xi_1 - Ry}{\sqrt{1-R^2}}\right) dy \quad (2 \cdot 2 - 8)$$

すなわち，超過確率 $1 - F$ は ξ_1, C および R を与えられれば計算できる。ここでは ξ_1 の変化に対する性質をみるために $\partial(1-F)/\partial\xi_1$ の符号を調べてみる。それには，変換後の密度分布 $f(\xi, \eta)$ が ξ, η に関して対称であるから，弧 $B_0 D_0$ 上のうち，対称軸 $\eta = \xi$ より上半分， $CR \leq \xi_1 \leq C\sqrt{(1+R)/2}$ について調べればよい。その結果，

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2(1-F)}{\partial\xi_1^2} \right]_{CR \leq \xi_1 \leq C\sqrt{\frac{1+R}{2}}} &< 0 \\ \left[\frac{\partial(1-F)}{\partial\xi_1} \right]_{\xi_1 = C\sqrt{\frac{1+R}{2}}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 2 - 9)$$

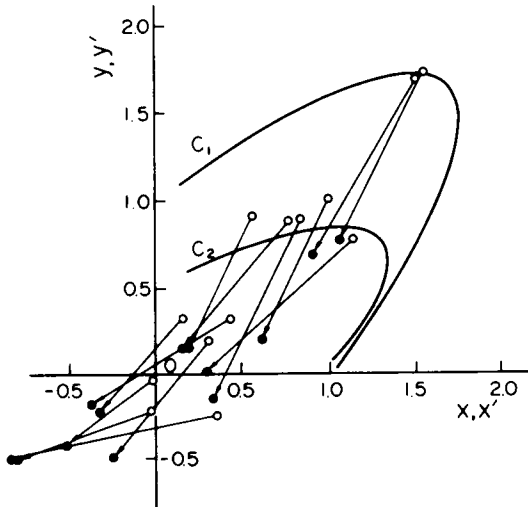
となり，確率長円上では超過確率は対称軸に近づくとともに減少し，軸上で最小，すなわち水系全体としての安全性がもっとも高いことがわかる。

以上の考えに基づいて淀川支川の木津川の加茂地点に洪水調節池，八幡地点に堤防を計画するとした検討例を簡単に述べるとつぎのようである。計画基本量として洪水時の八幡のピーク水位 H ，加茂の総流出量 V を採用し，これを適当な対数変換を行ない規準正規変量 x, y に変換した。また，この x, y を使って計算した標本相関係数 r をもって ρ に代用した。

つぎに，調節池における調節操作方式としては，流入量がピークに達するまでは流入量の一定率放流，ピーク後は一定量放流する方式を採用した。したがって，放流後の洪水を八幡地点まで追跡計算して調節後のピーク水位 H' が，また，調節池の貯留水量の計算によって調節後総流出量 V' が求められる。既往の洪水資料について，調節率を 50% とし H' および V' を計算し，さきに求めた規準正規変換を使って x' および y' に変換し， x, y と同じ座標に示したのが図 2・2-4 である。同図で，白丸とそれに対応する黒丸が調節前後の洪水波型を表わしており，その間に近似的に線型関係が成り立つことがわかる。

図 2・2-4

洪水調節前後の既往高水波および
計画高水波の変形の例
(50%貯留の場合)



いま、既往資料の中で最大の規模であった洪水と同じ確率密度をもつ洪水群を計画高水に選定したとすると、 $C = 1.748$ となる。

また、図 2・2-4 で計画高水 C_1 が調節後 C_2 に移り、さらに $R = 0.825$ が得られる。以上の結果を用いると、この水系における洪水調節施設に対する高水の超過確率は、式 (2・2-7) より、

$$1 - F(1.748, 0.825) =$$

0.0603 となる。ところで、かりに H' と V' とが互いに独立であるとなれば、これは式 (2・2・1-7) において $R = 0$ とおくことに

よって、 $1 - F(1.748, 0) = 2I_1 - I_1^2 = 0.0810$ となり、相関を考慮した場合より大きい値を与えることがわかる。すなわち高水要素間の相関を考慮することによって始めて水系全体の超過確率が評価できるといえよう。

2・3 洪水処理施設の操作・配置の最適化

つぎに、二変数統計的手法による洪水処理施設の最適な操作および配置を洪水調節池および合流河道について具体的に考察してみる。

2・3・1 洪水調節池における最適操作

ここでは、堤防区間での計画高水流量や洪水調節池容量が定まっている場合、洪水調節池における最適な洪水調節操作の選定の基本的な考え方を述べてみたい。²⁾

1) 最適調節率の選定

洪水調節方式を前出 2・2 の適用例と同じ方式を採用するものと仮定する。すなわち，洪水の流入量を一定の調節率 p で調節し，流入洪水がピーク流量 Q_p に達した後 $(1-p)Q_p$ の一定量放流を採るとし，貯水池での貯留量を V ，放流後の堤防地点でのピーク流量を Q と記しておく。したがってこのような高水の規模は計画基本量 Q ， V で表現され，また高水生起の確率密度関数 f は，無操作時の Q ， V を用いて，

$$f = f(Q, V)$$

と表わすことができる。一方，下流堤防区間の計画高水流量を Q_d ，洪水調節池の有効貯水容量を V_f とする。調節率 p_1 で調節した場合，当然下流へ安全に流下させうる高水の規模は無調節時より大きくなる。これを下流堤防区間のピーク流量で Q_d ，貯水池での最大貯留量で V_f になる Q ， V の組合せとして次式で表わしておく。

$$Q_d = Q_d(p_1; Q, V), \quad V_f = V_f(p_1; Q, V)$$

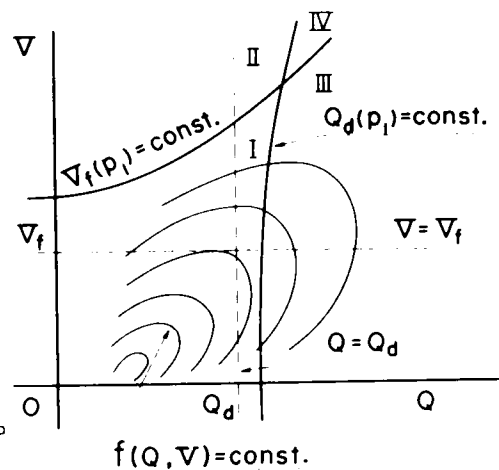
これを以後簡単に $Q_d(p_1) = \text{const.}$

$V_f(p_1) = \text{const.}$ と記すことにする。この関係式は図 2・3-1 のように一般には Q ， V 面で 2 本の曲線となる。ただし，貯水池と堤防区間との距離が短く，その間の洪水変形が無視しうるならば，前者は $Q_d(p_1) = Q_d / (1-p_1)$ となり， V 軸に平行な直線となる。

図 2・3-1 にみられるように，この 2 つの曲線によって Q ， V 平面は I ~ IV の 4 つの領域に分けられる。これらの領域のもつ実的な意味はつぎのようである。

図 2・3-1

洪水調節池における高水調節効果の二変数確率による評価



まずⅠの領域は、 $p = p_1$ の調節を行なった場合、下流でのピーク流量が計画高水流量以下、かつ貯水池の貯留量が有効貯水容量以下、すなわち、調節後の放流高水および調節時の貯水量の両面からみて安全であるような高水群に対応している。Ⅱの領域は、調節後の放流量の面からは安全であるが、貯水量が有効貯水容量を越え、調節が不可能になるような高水群に対応する。Ⅲの領域は、貯水量の面からは安全であるが、放流量が計画高水流量以上になる高水群に対応する。Ⅳの領域は、放流量からも貯水量からも危険となるような高水群に対応する。結局、調節率が $p = p_1$ という一定率であるかぎり、Ⅰ、ⅡおよびⅣの領域では下流に対して危険を生ずる場合で、Ⅲはそうでない領域を表わしている。もちろん、各場合に対する確率はその領域の確率密度曲面下の体積を計算することによって求められる。

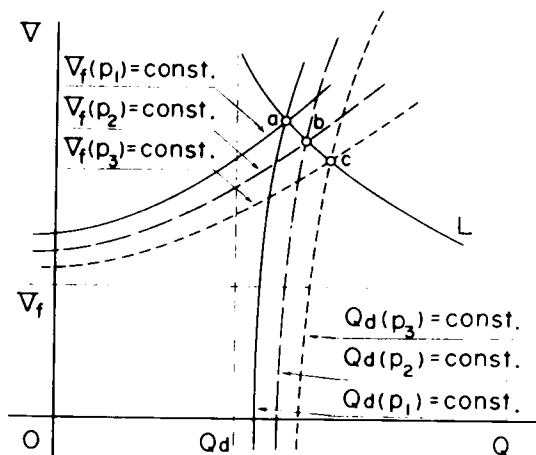
さて、上述した領域は、調節率 p を変えると変化する。たとえば、 p_1 を p_2 ($p_2 > p_1$) に変えると、図 2・3-2 に見られるように、洪水調節の可能な限界を示す2曲線は、 $Q_d(p_2) = \text{const.}$, $V_f(p_2) = \text{const.}$ に変わる。したがってⅠ～Ⅳの各領域がそれぞれ変化する。

そこで、種々の調節率 p に対して、どこかで計画規模を超過する高水の確率、換言すると、下流部で計画高水流量以上の放流量になったり、貯水池で貯留できずに一時に放流し段波を生じたりして破堤の危険のある確率を求めることができる。

以上の結果を用いると、確率的にみて最適な調節率の決定方法としては、上述した計画規模に対して危険側の超過確率が最小となるような調節率を採用すればよいといえる。

図 2・3-2

調節率の変化に伴う洪水調節効果領域の移動



2) 調節可能範囲

つぎに図 2・3-2 において、 $Q_d(p)=\text{const.}$ 、 $V_f(p)=\text{const.}$ の交点は調節率を p_1, p_2, p_3, \dots と変えることによって、 a, b, c, \dots と移動する。この交点を結ぶ曲線 L の意味を考えると、 L より右上の領域では、いかに調節率を変えても調節不可能な高水群に対応している。逆に、 L より左下の領域では、調節率を変えることによって貯水量を有効貯水容量以下に収め、しかも放流量を計画高水流量以下にすることの可能な高水群に対応している。したがって、洪水調節が適切に行なわれた場合の下流の安全確率は、この L 曲線の左下側の確率密度曲面下の体積として計算される。よって正確な洪水予報ができれば、適当な調節率を随時採択することによって安全確率をこの値に近づけることができ、調節方式を改めたいかぎりこれ以上の洪水調節効果を期待することは不可能である。

この考え方を木津川水系名張川の高山ダムに適用した例を簡単に述べるとつぎのようである。計画基本量として、ダム地点より約 4 km 上流の月ヶ瀬地点の水位の時間記録より推定したダム地点の洪水の総流量 V 、下流で伊賀川と合流した後の大河原地点の流量 Q を採用した。計画基準として、高山ダムの洪水調節用有効貯水池容量 $V_f = 3.54 \times 10^7 \text{ m}^3$ 、大河原地点の計画高水流量を $4,540 \text{ m}^3/\text{sec}$ と仮定して、この計画基準に対して危険側の超過確率が最小となるような調節率を試算したところ、 $p = 0.4$ となり、超過確率は 5.2 % となった。

つぎに、調節率 p を適宜変化させて最も有効に調節し得た場合の超過確率が 4.6 % となった。この結果からみると、対象とした一山高水の場合には流入高水によって調節率を変えて調節効果をあげようとしても、最適の一定調節率に対する効果を比較すればそう大きく変化しないことがわかった。

2・3・2 合流河道における計画高水流量の配分

ここでは、二本の支川が合流して本川となっており、各支川および本川に沿う堤内地がそれぞれ防護対象となる場合、水系全体の高水流量の超過

確率の評価および各河道間の計画高水流量の配分について考える。

1) 計画高水流量の超過確率の評価

支川 1 および 2 を流下する洪水のピーク流量をそれぞれ Q_1 および Q_2 , それらが合流して本川を流下するときのピーク流量を Q とする。さて, この Q は, 厳密には Q_1 , Q_2 の大きさばかりでなく, 両者の間の合流時差などが問題になるので, 三変数以上の確率問題と考えねばならない。しかし, このような取扱いは極めて複雑であり, 合流機構に未解明な面の多い現状では, 合流時差の影響をも含めて近似的に次式のような線型的な関係

$$Q = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_3 \quad (2 \cdot 3 - 1)$$

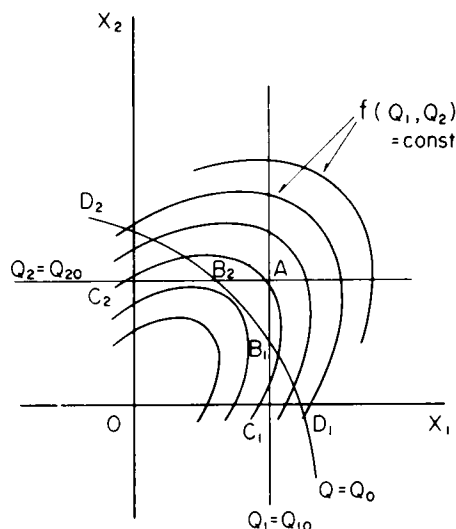
で表わせる場合を考えておく。ただし, a_1 , a_2 および a_3 は定数である。したがって, Q の生起する確率は Q_1 , Q_2 の同時に生起する確率として, 二変数統計の問題となる。 Q_1 , Q_2 の同時分布として一般には種々の分布があろうが, 以後その最も簡単なものとして, 正規変換が可能である場合すなわち, 同時分布が二変数正規分布に従う場合について説明する。分布関数に含まれる母数は, 第 1 編, 第 3 章の結果を利用して計算でき, Q_1 , Q_2 がそれぞれ規準正規変量 x_1 , x_2 によって表現されたとしよう。

図 2・3-3 の曲線群 $f(Q_1, Q_2) = \text{const.}$ は, 横軸および縦軸を規準化変量 x_1 , x_2 で表わした場合の等確率密度線を示したものである。なお, 正確には, 規準正規化変量でいうべきであるが, 理解を容易にするため, 以下では原変量, すなわち流量 Q を使って説明する。

さて, 支川 1, 2 および本川における計画高水流量をそれぞれ Q_{10} , Q_{20} および Q_0 とすると, 直線

図 2・3-3

合流河道における計画高水流量の超過確率の二変数表示



$A B_1 C_1$, $A B_2 C_2$ および (2・3-1) 式を表わす曲線 $D_1 B_1 B_2 D_2$ は , この水系を流下する高水が , それぞれ支川 1 , 2 および本川の計画高水流量を越えて被害を生ずる限界線と考えてよい。このうち本川の計画高水流量に対する超過確率は , (2・3-1) 式が成立ち , かつ二変数正規分布の場合には , 第 1 編 1・2 の線型結合和の理論結果を用いて簡単に計算できる。さて , 折線 $C_1 B_1 B_2 C_2$ の右上側の領域においては , 対象とする河道のどこかで計画基準を超過する可能性があると考えられるから , この水系内のどの河道においても計画基準を超過しない確率はこの折線の左下側にある確率密度曲面下の体積として求められる。また , たとえば , 図形 $C_1 B_1 D_1$ の内部は , 本川および支川 2 に対しては安全であるが , 支川 1 では計画基準を超過し , 被災を生ずる可能性がある高水群に対応した領域であり , このような確率の計算も同様に行なえる。

2) 各河道への計画高水流量の配分

つぎに , それでは各河道における計画高水流量 Q_{10}, Q_{20}, Q_0 をどのような考えの下に定めるべきであろうか。前提として , この水系全体における計画規模が与えられている。すなわち , 被害期待値あるいは超過確率などが与えられているものとした場合に , 各河道への計画高水流量の配分に対する考え方について議論してみたい。

まず考えられる基準は , この水系全体からみて各河道の洪水被害の期待値が等しくなるように配分する方法である。たとえば支川 1 で , ピーク流量 $Q_1 (> Q_{10})$ の高水が起った場合の被害額を $D(Q_1)$, Q_1 の密度分布を $f(Q_1)$ のように記すと , この配分は次式のように表現できる。

$$\begin{aligned} \int_{Q_{10}}^{\infty} f(Q_1) \cdot D(Q_1) dQ_1 &= \int_{Q_{20}}^{\infty} f(Q_2) \cdot D(Q_2) dQ_2 \\ &= \int_{Q_0}^{\infty} f(Q) \cdot D(Q) dQ \end{aligned} \quad (2 \cdot 3 - 2)$$

ただし , (2・3-1) 式より , 本川の被害期待値は次式のように Q_1, Q_2 に関する積分として求められる。

$$\int_{Q_0}^{\infty} f(Q) \cdot D(Q) dQ = \iiint_{Q_0 = Q_1 + Q_2 + Q_3} f(Q_1, Q_2) \cdot D(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2 \quad (2 \cdot 3 - 3)$$

ところで，前にも述べたように被害関数を適確に推定することは実際問題としてかなり難しい問題である。したがって，(2・3-2)式の代りに各河道に付随した防災対象地域の重要度を示す，たとえばダメージポテンシャルのような，係数 w_1, w_2, w が求められれば，

$$\begin{aligned} w_1 \int_{Q_{10}}^{\infty} f(Q_1) dQ_1 &= w_2 \int_{Q_{20}}^{\infty} f(Q_2) dQ_2 \\ &= w \iiint_{Q_0} f(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2 \end{aligned} \quad (2 \cdot 3 - 2')$$

で配分を考えればよい。

ところで，一般には，支川沿いの防災対象地域に比べて本川沿いの地域の開発は進んでおり， w は w_1, w_2 に比べてかなり大きく，すなわち本川の超過確率は支川に比べてかなり小さく採られていることが多いようであって，たとえば，本川の計画高水流量 Q_0 は，安全を考慮して支川の計画高水流量の和 $Q_{10} + Q_{20}$ に近く採られる。既出の図2・3-3でいえば，点 B_1, B_2 は点Aに近くなる。

極端な場合として， $Q_0 = Q_{10} + Q_{20}$ ，すなわち，点Aが B_1, B_2 に一致した場合を考えてみると，このような計画基準によれば，本川の計画高水流量を超過するような高水は，支川の計画基準を超過するような高水が発生した場合にしか起り得ないことになる。通常，どこかの河道で一度計画高水流量を超過した高水によって破堤が起これば，他の河道で破堤する危険はかなり減少すると考えられるから，本川沿いの地域の安全度は，支川沿いの地域に比較してかなり大きく，著しい相違があるように思える。

つぎに，地域住民の民心の安定という観点から計画基準を考える。それには，ある地区を防護している堤防のみが越流し他の地区が安全である場

合の被害期待値がそれぞれ等しくなるように計画高水流量を配分する基準が考えられる。図 2・3-3 において， AB_1B_2 ， $C_1B_1D_1$ ， $C_2B_2D_2$ の内部に対応する確率がそれぞれの地区の単独被害に対応するから，この配分は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 \iint_{AB_1B_2} f(Q_1, Q_2) \cdot D(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2 \\
 &= \iint_{C_1B_1D_1} f(Q_1, Q_2) \cdot D(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2 \\
 &= \iint_{C_2B_2D_2} f(Q_1, Q_2) \cdot D(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2
 \end{aligned}
 \tag{2・3-4}$$

また，実用的には (2・3-2) に対応して次式のように表わしてもよい。

$$\begin{aligned}
 w \iint_{AB_1B_2} f(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2 &= w_1 \iint_{C_1B_1D_1} f(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2 \\
 &= w_2 \iint_{C_2B_2D_2} f(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2
 \end{aligned}
 \tag{2・3-4'}$$

もちろん，(2・3-2) と (2・3-4) あるいは (2・3-2') と (2・3-4') の両式を同時に満足させるように計画高水流量を配分することは一般にはできないであろう。したがって，通常は (2・3-2) 式あるいは (2・3-2') 式によって計画基準を定めた後，その基準が (2・3-4) 式あるいは (2・3-4') 式をどの程度満足させているかを検討する必要がある。その結果，地区間に極端な不均衡が認められる場合には，危険度の高い地域に，別の洪水処理施設を計画したり，通報・避難体制を整備するなどの二次的な対策を行ない，計画上の不備を補うような配慮が要求される。

最後に，以上の考えに基づいて高山ダム完成前における淀川水系の状況を検討した計算例を述べる。対象地域としては，支川 1，2 に対応して木

津川（流量観測地点，加茂），桂川（羽束師），合流後の本川に対応して淀川（枚方）を採用し，資料として，大正元年より昭和36年までの年最大洪水の記録を用いた。

まず，岩井法によって加茂・羽束師地点における洪水の最大流量 Q_1, Q_2 （ m^3/sec 単位）の規準正規変量 x_1, x_2 を求めると，これはつぎのようになる。

$$x_1 = \frac{\log(Q_1 - 256) - 3.100}{0.5355}, \quad x_2 = \frac{\log(Q_2 - 113) - 2.884}{0.4524}$$

さらに， x_1 と x_2 との間の相関係数は $r = -0.11$ となるが，有意水準5%の棄却検定の結果， $\rho = 0$ としてよいことがわかった。

つぎに支川流量と本川流量の関係を求めねばならない。淀川には木津川・桂川他に宇治川も合流しているのであるが，宇治川は洪水時に南郷の洗堰を全閉して洪水を調節するので，その影響は前述の（2・3－1）式の右辺の定数 a_3 として平均的に表わしうると考えてよいであろう。最小自乗法によって，定数 a_1, a_2 および a_3 を求めると， m^3/sec 単位で次式のようにになる。

$$Q = 0.884 Q_1 + 1.035 Q_2 + 70$$

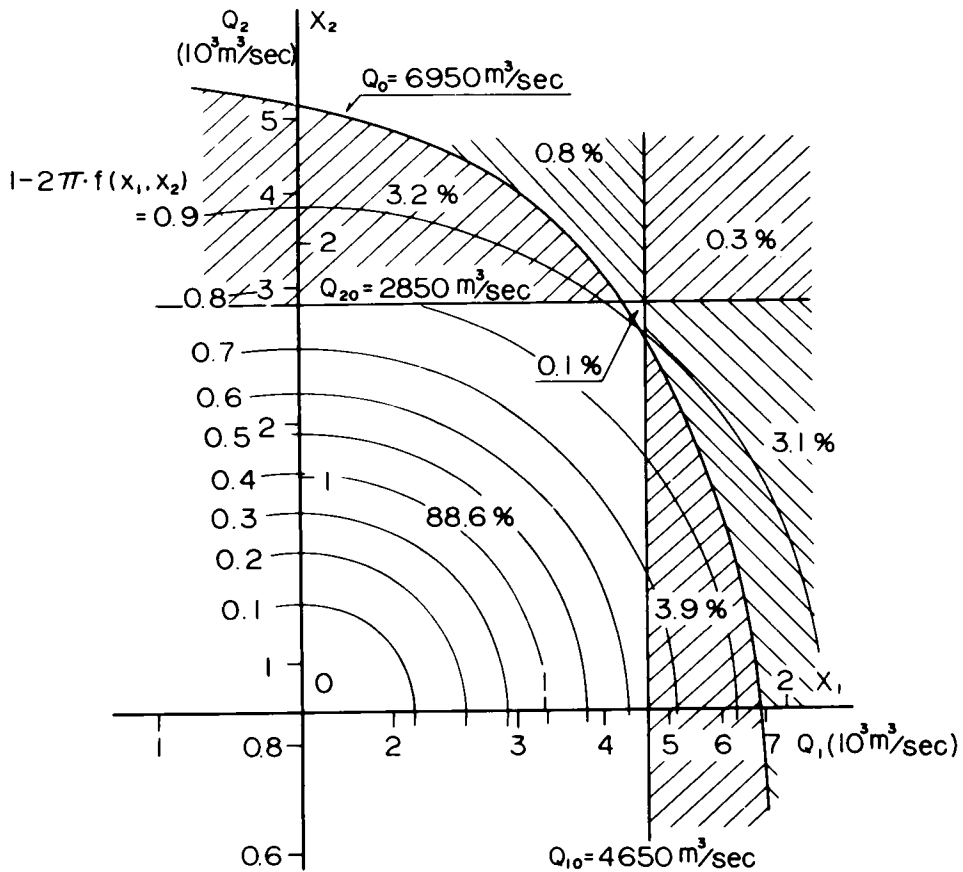
以上で必要な関係式が得られたので，高山ダムがないとした場合の淀川水系改修基本計画について検討した。この計画では各河道の計画高水流量をつぎのように定めている。⁴⁾

1. 木津川・加茂地点で $5,900 m^3/sec$ を目標とするが，高山ダム築造後は $4,650 m^3/sec$ とする。
2. 桂川・羽束師地点で $2,850 m^3/sec$ とする。
3. 本川・枚方地点で $8,650 m^3/sec$ を目標とするが，高山ダム築造後は $6,950 m^3/sec$ とする。

すなわち，河道の洪水疎通能力である計画高水流量は木津川 $4,650 m^3/sec$ ，桂川 $2,850 m^3/sec$ ，本川 $6,950 m^3/sec$ である。こうした堤防計画の対象となる計画高水流量と，各領域における高水生起の確率を確率

図 2・3-4

淀川水系の河道に対する高水の生起確率



密度曲面下の体積として数値積分した結果を百分率で示したのが、図 2・3-4 である。これをみると、高山ダムがないとした場合、水系全体で計画高水流量を越える確率は 11.4 %，すなわち、平均的にみてほぼ 10 年に 1 度位の割合でどこかの河道で計画高水流量を突破する高水が発生する可能性があると考えられる。さらに、木津川・桂川および本川で計画高水流量を越す確率はそれぞれ 7.3 %，4.3 % および 4.3 % となり、木津川筋の超過確率がかなり大きい。ついで各河道でそれぞれ単独に計画高水流量を越す確率を比べると、木津川および桂川がそれぞれ 3.9 % および 3.2 % でほぼ同程度なのに対し、合流後の本川は 0.1 % で極端に小さい値を示し

ている。なお，図中の $1 - 2\pi \cdot f(x_1, x_2)$ はその長円の内部に含まれる確率を意味している。

参 考 文 献

- 1) 石原安雄・長尾正志；計画高水流量の二変数確率論的研究，京都大学防災研究所年報第6号，昭和38年7月，pp. 181-188.
- 2) 長尾正志；洪水処理計画に関する確率論的研究，京都大学防災研究所年報第10号B，昭和42年3月，pp. 41-51.
- 3) 長尾正志；洪水処理計画，昭和42年度講習会テキスト，水理学・水文学における最近の進歩，土木学会，昭和42年3月，pp. 35-44.
- 4) 玉井正彰；淀川の河川計画と水管理の研究，昭和36年3月，pp. 65-69.

第 3 章 利水用貯水池による渇水補給に関する研究

3・1 利水計画における二変数問題の一変数統計的处理

貯水池による利水計画を樹てる場合には，一般に，貯水池に流入する時々刻々の流量というよりむしろある継続した期間において平滑化された総流量が計画対象となる。したがって，流入量系列間に内在する情報をどのように抽出して考察の対象とするかによって計画の方向が決められるといって過言でない。

さて，貯水池による補給水量の信頼性を確率的な面から評価しようとする試みは，既往流入量系列をそのまま利用した，いわゆる **Mass Curve** の方法と関連して古くから進められてきた。しかし，過去の流入量系列が将来もそのまま生起するという保証は何もないから，流入量の不確定性を考慮した

さらに現実に近い理論モデルの設定が必要とされた。そこで、貯水池を含む系を1年をサイクルとして同じ状態を繰り返す在庫モデルに擬して、補給水量の価値評価を行なうという研究がLittle¹⁾やKoopmans²⁾によって、火力発電との関連において行なわれた。さらにこうした研究の進展したものとして、確率的な変動をする流入量を入力とする貯水池系を考え、貯水量系列が単純マルコフ連鎖を構成することに着目し、経年的な貯水量状態の推移確率を考察したMoran³⁾の研究や、さらに季節的特性を導入しようとするHarvard 大学の水資源開発研究グループによる試み⁴⁾などが注目される。

ところで、上記の理論はいずれも、流入量系列は互に独立という仮定に基づいているが、現実の流入量系列には持続性が認められ、この仮定は厳密には成立しない。そこで、時間的に隔った流量間に相関性を考慮した研究がLloydらによって試みられてはいる⁵⁾が、現在のところ、特殊な場合の解しか得られていない。したがって、実際の解析では、流入量が独立、すなわちランダム性の仮定が許されるように流入量系列を整理し、在庫モデル等を応用した方が便利である。すなわち、二変数統計問題を直接扱わないで一変数問題として処理しようとするわけである。

さて、本章では、貯水池による補給水量確保の可能性を、確率的な入力を受ける在庫問題として考察した結果について述べる。ここでは、とくにわが国河川のように季節的特徴の著しい流況をいかに勘案するかに重点をおいた。その概要を述べると、まず、年間における流入量系列を季節的にランダム化する手法を示した。ついで、こうして得られた確率分布をもつ流入量を使って、渇水の量的な検討を行なう基礎として、貯水量の定常分布を推定する方法を、貯水池の操作規則が年間で一定の場合とそうでない場合について考察した。さらに、渇水の時間的な検討を行なう基礎として、時間経過と渇水確率の関係を示した。最後に、実河川への適用例を通じて問題を取扱う際の具体的手法を示した。⁶⁾

3・2 流入量系列のランダム化

貯水池へ流入する流量系列をランダム化し、これを入力とする在庫問題と

して貯水池問題を取扱うには、わが国のように貯水池規模が小さく、季節ないしそれ以下の期間での流量の調整が主目標である場合には、まず季節的な流量の持続性の定量的な把握が基礎となる。

このため、著者は各地の河川の日流量に基づくコレログラムの低減特性を調べてきたが、その結果、同一地点では季節的にはほぼ類似の特性を示すことが認められた。⁷⁾いま、日総流入量系列を $\{X(t)\}$, $t = 1, 2, \dots, N$ とし、平均値、標準偏差をそれぞれ \bar{X} , D とすれば、ずれ τ 日の自己相関係数は次式で得られる。

$$r(\tau) = \frac{1}{N D^2} \sum_{t=1}^N \{X(t+\tau) - \bar{X}\} \{X(t) - \bar{X}\} \quad (3 \cdot 2 - 1)$$

一方、上式で $r(\tau)$ がわかれば、重複しないでとった j 日間総流量の自己相関係数 $r_j(\tau)$ は、一般につきの近似式で求められる。

$$\begin{aligned} r_j(\tau) = & [r(j\tau-j+1) + 2r(j\tau-j+2) + \dots + (j-1)r(j\tau-1) + \\ & jr(j\tau) + (j-1)r(j\tau+1) + \dots + 2r(j\tau+j-2) + r(j\tau+j-1)] \\ & \times [j+2\{(j-1)r(1) + (j-2)r(2) + \dots + r(j-1)\}]^{-1} \end{aligned} \quad (3 \cdot 2 - 2)$$

この $r_j(\tau)$ を実測資料より算出してみると、 j および τ が 1, 2 週間程度以内では、ほぼ指数関数的に減少し、その低減係数は季節ごとに定数とみなしうる。そこで $r_j(\tau)$ を、たとえば、第 s 季について次式で表わし、その低減係数 $\alpha_j^{(s)}$ を流量の持続性の測度と考えておく。

$$r_j^{(s)}(\tau) = \exp\{-\alpha_j^{(s)}|\tau|\} \quad (3 \cdot 2 - 3)$$

一方、流量系列がランダムであるということは、実用的には、既往の系列を用いた将来の流量予測に意味がないことである。そこで、この予測を線型的な予測で考えとし、N. Wiener の線型予測理論を用いて、予測可能な限界を求めることができる。これは、過去のある時点 $t-\tau$ ($\tau \leq t$) の値 $X(t-\tau)$ を知って p 期間後の将来値 $X(t+p)$ ($p > 0$) を

$$X(t+p) = \int_{-\infty}^t X(t-\tau) dK(\tau)$$

によって推定しようとする場合、積分方程式の核 $K(\tau)$ を最小二乗誤差の意味で決定することである。結論のみを記すと、このような予測に伴う二乗誤差 σ^2 は次式で与えられる。⁸⁾

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= \int_0^\infty \psi(t) \overline{\psi(t)} dt, \quad \psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp(i\lambda t) \Psi(\lambda) d\lambda \\ \text{ここに, } \Psi(\lambda) \overline{\Psi(\lambda)} &= \int_{-\infty}^\infty \exp(-i\lambda t) r(t) dt \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 2-4)$$

$r(\tau)$ が (3・2-3) 式で与えられる場合、上式より次式が得られる。

$$\sigma^2 = 1 - \exp(-2\alpha_j^{(s)} p) \quad (3 \cdot 2-5)$$

ただし、完全に予測できれば $\sigma^2=0$ ，完全に予測が無意味ならば $\sigma^2=1$ である。

そこで、 σ_a^2 を予測に伴い許容される誤差とすれば、予測可能な期間 $p_j^{(s)}$ は次式のようになる。

$$p_j^{(s)} = -\log(1 - \sigma_a^2) / 2\alpha_j^{(s)} \quad (3 \cdot 2-6)$$

したがって、 j 日を単位期間とし (3・2-2)，(3・2-3) 式で求めた $\alpha_j^{(s)}$ を使い、ある許容誤差 σ_a^2 の下での予測限界 $p_j^{(s)}$ を (3・2-6) 式より求めれば、それが単位期間 j より小さくなれば予測は意味を持たないことになる。いいかえれば、そのような限界の j を $j_c^{(s)}$ と記すと、

$$j_c^{(s)} = p_j^{(s)} \quad (3 \cdot 2-7)$$

を満足するようになった $j_c^{(s)}$ 日間総流量は互いに独立となり、ランダム化されたことになる。そこで年間の流量系列を、季節ごとに、その間の総流量がランダム過程とみなせるような単位期間 $j_c^{(s)}$ ごとに分割し、それを標本とした確率分布を入力分布として採用すればよい。

3・3 貯水量確率の時間的变化

Moran は，ランダム流入量を受ける貯水池での貯水量変化を，流入量の確率分布および操作規則が各時点で変わらない場合の確率的な在庫問題として取扱っている。ここでは，その考えを，年間で流入量分布に季節的な相違があり，さらに貯水池容量および規定放流量を定める操作規則も季節的に変わる場合に拡張して考察してみたい。

3・3・1 基礎的仮定

計算の基礎においた仮定はつぎのようである。

I) 季節

1 年を L 個の季節に分け，これらを順に $I, II, III, \dots, S, \dots, L$ 季と呼ぶ。それぞれの季節には n_s ($S=I, II, \dots, L$) 個の期間がある。

II) 流入量

n で季節内の離散的な時点を表わすことにする。第 S 季内の任意期間 $(n, n+1)$ ($n=0, 1, 2, \dots, n_s-1$) での貯水池への総流入量を $X_n^{(s)}$ とし， $X_0^{(s)}, X_1^{(s)}, \dots, X_{n_s}^{(s)}$ は互いに独立，かつ，つぎのような同じ分布型をもつ。

$$\left. \begin{array}{l} p_r \{ X_n^{(s)} = j \} = g_j^{(s)} \quad (j = 0, 1, \dots) \\ \text{ただし} \quad g_j^{(s)} > 0 \end{array} \right\} (3 \cdot 3 - 1)$$

III) 貯水量

$Z_n^{(s)}$ を $X_n^{(s)}$ が貯水池に流入する前の時点における貯水量とする。

IV) 貯水池容量，規定放流量

季節ごとにそれぞれ規定の大きさの貯水池容量 k_s ，規定放流量 m_s をもつ。

3・3・2 貯水量分布の時間的变化

説明の便宜上、まず貯水池容量、放流量が年間を通して一定、すなわち、 $k_1 = k_2 = \dots = k, m_1 = m_2 = \dots = m$ の場合を述べて後、季節的に異なる場合、すなわち、 $k_s \neq k_{s+1}, m_s \neq m_{s+1}$ の場合について考える。

〔Case 1〕 貯水池容量、放流量が年間を通して一定の場合

前記の仮定の下で、 $n+1$ 時点における貯水量は、次式で与えられる。

$$Z_{n+1}^{(s)} = \min(k, Z_n^{(s)} + X_n^{(s)}) - \min(m, Z_n^{(s)} + X_n^{(s)}) \quad (3 \cdot 3 - 2)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, n_s - 1)$$

したがって、貯水量系列 $\{Z_n^{(s)}\}$ は単純マルコフ連鎖を構成することがわかる。マルコフ連鎖の性質として、第 s 季の任意時点 n の状態確率ベクトル P_n は、初期確率ベクトル $P_0^{(s)}$ および推移確率行列 P_s によって次式で表わせる。

$$P_n = P_0^{(s)} P_s^n \quad (n = 1, 2, \dots, n_s) \quad (3 \cdot 3 - 3)$$

ただし

	\nearrow	0	1	2	⋯	$k-m-1$	$k-m$
$P_s =$	0	G_m	g_{m+1}	g_{m+2}	⋯	g_{k-1}	h_k
1	G_{m-1}	g_m	g_{m+1}	⋯	g_{k-2}	h_{k-1}	
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	
m	G_0	g_1	g_2	⋯	g_{k-m-1}	h_{k-m}	
$m+1$	0	g_0	g_1	⋯	g_{k-m-2}	h_{k-m-1}	
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	
$k-m$	0	0	0	⋯	g_{m-1}	h_m	

(3・3-4)

ここに $G_j = \sum_{i=0}^j g_i$, $h_j = \sum_{i=0}^{\infty} g_i$

ただし，(3・3-4)式の右辺では s は略してある。

さらに，第 $s+1$ 季に関しては

$$P_n = P_0^{(s)} P_s^{n_s} P_{s+1}^n \quad (n = 1, 2, \dots, n_{s+1}) \quad (3 \cdot 3 - 5)$$

一般に，第 I 季より始まった第 s 季に関しては

$$P_n = P_0 P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_s^n \quad (n = 1, 2, \dots, n_s) \quad (3 \cdot 3 - 6)$$

が任意時点の状態確率を与える。

1) 貯水量分布の遷移

ここでは，初期状態として特殊な場合を想定し，それが時間的にどのように遷移するかを考える。まず，(3・3-6)式において $P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_s^n$ を $P^{(n)}$ ，その確率成分を $p_{ij}^{(n)}$ ($i, j = 0, 1, \dots, k-m$)と記すと，初期状態 $P_0^{(1)} = (p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, \dots, p_{k-m}^{(0)})$ に始まる任意時点 n における状態確率ベクトル $(p_j^{(n)})$ は，次式のように書き直せる。

$$\begin{aligned} (p_j^{(n)}) &= (p_0^{(0)}, \dots, p_{k-m}^{(0)}) (p_{ij}^{(n)}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k-m} p_i^{(0)} p_{ij}^{(n)} \right) \end{aligned} \quad (3 \cdot 3 - 7)$$

これによって，貯水量の初期状態が任意に与えられたときに，以後の貯水量の遷移が計算できるが，とくに重要なのはつぎの場合である。

a. 初期満水位の場合， $p_0^{(0)} = \dots = p_{k-m-1}^{(0)} = 0$ ， $p_{k-m}^{(0)} = 1$ とおくと，

$$(p_j^{(n)}) = (p_{k-m,0}^{(n)}, p_{k-m,1}^{(n)}, \dots, p_{k-m,k-m}^{(n)})$$

b. 初期零水位の場合， $p_0^{(0)} = 1$ ， $p_1^{(0)} = \dots = p_{k-m}^{(0)} = 0$

$$(p_j^{(n)}) = (p_{0,0}^{(n)}, p_{0,1}^{(n)}, \dots, p_{0,k-m}^{(n)})$$

c. 初期設定水位（貯水位をある量 f に設定）の場合， $p_f^{(0)} = 1$ ，

$$p_i^{(0)} = 0 \quad (i \neq f)$$

$$(p_j^{(n)}) = (p_{f,0}^{(n)}, p_{f,1}^{(n)}, \dots, p_{f,k-m}^{(n)})$$

d. 初期制限水位（貯水位をある値 f 以下に制限）の場合， $p_j^{(0)}$ ($j=0, \dots, k-m$) を自然状態では 0 時点で貯水量が j になる確率とすれば，

$$p_0^{(0)} = p_0^0, \dots, p_{f-1}^{(0)} = p_{f-1}^0, p_f^{(0)} = \sum_{i=f}^{k-m} p_i^0, p_i^{(0)} = 0 \quad (i \geq f+1)$$

$$(p_j^{(n)}) = \left(\sum_{i=0}^{f-1} p_i^0 p_{i,0}^{(n)} + p_{f,0}^{(n)} \sum_{i=f}^{k-m} p_i^0, \sum_{i=0}^{f-1} p_i^0 p_{i,1}^{(n)} + p_{f,1}^{(n)} \sum_{i=f}^{k-m} p_i^0, \dots, \sum_{i=0}^{f-1} p_i^0 p_{i,k-m}^{(n)} + p_{f,k-m}^{(n)} \sum_{i=f}^{k-m} p_i^0 \right)$$

Ⅰ) 貯水量の定常分布，過水確率

(3・3-6) 式より，第Ⅰ季の始めを出発点とした 1 年を 1 サイクルとした場合， N 年後の状態確率はつぎのようになる。

$$P_N = P_0^{(1)} (P_1)^N, \quad P_1 = P_1^I P_1^{II} \dots P_1^L \quad (3 \cdot 3 - 8)$$

ところで，一般に P が正則なマルコフ過程 $P_N = P_0 P^N$ では， $N \rightarrow \infty$ のとき P_0 に無関係に P_N がある確定した極限ベクトル W に収束し， W は $W = WP$ を満すものとして与えられる。 P が正則であることを証明するには，ある N に対して P^N の各成分が正になることをいえばよい⁹⁾ が，いまの仮定のようにすべての j に対して $g_j > 0$ であれば成立つことが明らかである。

したがって第Ⅰ季の初期における定常分布は，次式を満す W として求められる。

$$W^I = W^I P_1$$

一般に，第 s 季の初期および季内の任意時点での定常分布 $W^{(s)}$ ， $W^{(s,n)}$ は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} W^{(s)} &= W^{(s)} P_{(s)} \quad , \quad P_{(s)} = P_s^{n_s} P_{s+1}^{n_{s+1}} \dots P_L^{n_L} P_1^{n_1} \dots P_{s-1}^{n_{s-1}} \\ W^{(s,n)} &= W^{(s)} P_s^n \\ (s &= I, II, \dots, L; n = 1, 2, \dots, n_s) \end{aligned} \right\} (3 \cdot 3 - 9)$$

こうして貯水量の定常分布が判れば，規定放流量を確保できない確率，すなわち，渴水確率をつぎのように定義できる。すなわち，この放流規則が $\min(m, Z_n + X_n)$ で，かつ X_n は確率変数であり必ず期待できるとは限らないから，規定放流量を確保できない確率，つまり渴水確率を貯水量が規定放流量に不足する確率として次式のように考えることができる。

$$r(s, n) = \sum_{i=0}^{m-1} w_i(s, n) \quad (3 \cdot 3 - 10)$$

〔Case 2〕 貯水池容量，放流量が季節的に変わる場合

まず，最も単純な2つの季節の場合について考察する。第Ⅰ季における貯水量の初期分布および推移行列をそれぞれ $\mathbf{P}^{1,0} = (\mathbf{P}_0^{1,0}, \mathbf{P}_1^{1,0}, \dots, \mathbf{P}_{k_1-m_1}^{1,0})$ および $\mathbf{P}_i = (p_{ij}^1; i, j = 0, 1, \dots, k_1-m_1)$ と記せば，季内の任意時点 n における分布は (3・3-3) 式によって，

$$\mathbf{P}^{1,n} = \mathbf{P}^{1,0} \mathbf{P}_i^n, \quad (n=0, 1, \dots, n_1-1) \quad (3 \cdot 3 - 11)$$

となることはCase 1と同じである。しかし，Ⅰ季末 $n=n_1$ ，すなわちⅡ季の始めには，貯水池の操作規則が変わるために，貯水量の存在範囲が $(0, k_1-m_1)$ から $(0, k_2-m_2)$ に変化する。この変化の内容はつぎのように2段に分けて考えると理解しやすい。

Ⅰ) 貯水池容量の変化

ここでは季末期間 (n_1-1, n_1) に着目する。貯水池容量が k_1 から k_2 になることによって，貯水量の存在範囲は $(0, k_1-m_1)$ から $(0, k_2-m_2)$ になる。このことを状態推移の確率行列としてみれば， (k_1-m_1) 行， (k_2-m_2) 列の成分をもつものを考えておけばよい。この推移行列を $\mathbf{P}_{1,2}$ と記すと，これには2つの場合があり，それぞれはつぎのように書ける。

ただし，行列の成分および規定放流量中の添字Ⅰは略記している。

は . $k_1 \leq k_{11}$ の場合

\nearrow	0	1	2	•	$k_1 - m$	•	$k_{11} - m - 1$	$k_{11} - m$
$P_{1,11} =$								
0	G_m	g_{m+1}	g_{m+2}	•	g_{k_1}	•	$g_{k_{11}-1}$	$h_{k_{11}}$
1	G_{m-1}	g_m	g_{m+1}	•	g_{k_1-1}	•	$g_{k_{11}-2}$	$h_{k_{11}-1}$
•	•	•	•	•	•	•	•	•
m	G_0	g_1	g_2	•	g_{k_1-m}	•	$g_{k_{11}-m-1}$	$h_{k_{11}-m}$
$m+1$	0	g_0	g_1	•	g_{k_1-m-1}	•	$g_{k_{11}-m-2}$	$h_{k_{11}-m-2}$
•	•	•	•	•	•	•	•	•
$k_1 - m$	0	0	0	•	g_m	•	$g_{k_{11}-m-k_1+1}$	$h_{k_{11}-m-k_1+1}$

(3・3-12)

は . $k_1 > k_{11}$ の場合

\nearrow	0	1	2	•	$k_{11} - m - 1$	$k_{11} - m$
$P_{1,11} =$						
0	G_m	g_{m+1}	g_{m+2}	•	$g_{k_{11}-1}$	$h_{k_{11}}$
1	G_{m-1}	g_m	g_{m+1}	•	$g_{k_{11}-2}$	$h_{k_{11}-1}$
•	•	•	•	•	•	•
m	G_0	g_1	g_2	•	$g_{k_{11}-m-1}$	$h_{k_{11}-m}$
$m+1$	0	g_0	g_1	•	$g_{k_{11}-m-2}$	$h_{k_{11}-m-1}$
•	•	•	•	•	•	•
$k_{11} - 1$	0	0	0	•	g_0	h_1
k_{11}	0	0	0	•	0	1
•	•	•	•	•	•	•
$k_1 - m$	0	0	0	•	0	1

(3・3-13)

Ⅱ) 規定放流量の変化

Ⅰ季末には，貯水量の存在範囲は $(0, k_1 - m_1)$ であるが，これがⅠ)で $(0, k_{11} - m_1)$ に変わり，さらに $(0, k_{11} - m_{11})$ に変る。したがってⅠ)の変化を含めたⅠ季，Ⅱ季間の状態変化を推移確率 $P_{1,11} = (p_{ij}^{(1,11)})$ ，および $P_{1,11}' = (p_{ij}'^{(1,11)})$ と記すと， $k_1 - m_1, k_{11} - m_{11}$ の大小によって $p_{ij}^{(1,11)}$

けつぎのように表わせる。

α) $k_I - m_I \leq k_{II} - m_{II}$ の場合

$$p_{ij}^{I, II} = \begin{cases} p_{ij}^{I, I, II}, & 0 \leq j \leq k_I - m_I \\ 0, & k_I - m_I + 1 \leq j \leq k_{II} - m_{II} \end{cases} \quad (3 \cdot 3-14)$$

β) $k_I - m_I > k_{II} - m_{II}$ の場合

これは制限水位を設けた場合に相当するから，Case 1 の 1) d. により次式で表わせる。

$$p_{ij}^{I, II} = \begin{cases} p_{ij}^{I, I, II}, & 0 \leq j \leq k_{II} - m_{II} - 1 \\ \sum_{i=k_I - m_I}^{k_I - m_I} p_{ij}^{I, I, II}, & j = k_{II} - m_{II} \end{cases} \quad (3 \cdot 3-15)$$

したがって，(3・3-12)または(3・3-13)および(3・3-14)または(3・3-15)式によって求められた季節間の推移確率 $P_{I, II}$ を使えば，形式的にはCase 1と同じような演算が可能となる。すなわち，Ⅱ季の初期および季内の時点 n における貯水量の確率分布 $P^{II, 0}$ ， $P^{II, n}$ はそれぞれつぎのようになる。

$$P^{II, 0} = P^{I, 0} P_I^{n_I - 1} P_{I, II} \quad (3 \cdot 3-16)$$

$$P^{II, n} = P^{I, 0} P_I^{n_I - 1} P_{I, II} P_{II}^n \quad (3 \cdot 3-17)$$

$$(n = 1, 2, \dots, n_{II} - 1)$$

以上の結果を一般の場合（年間をⅠ，Ⅱ，…，Ⅴの季節に分け，各季にそれぞれ n_I, n_{II}, \dots, n_V 個の期間がある）に適用すると， S 季の初期および季内任意時点での貯水量分布はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} P^{(s, 0)} &= P^{I, 0} P_I^{n_I - 1} P_{I, II} P_{II}^{n_{II} - 1} P_{II, III} \dots P_{S-1}^{n_{S-1} - 1} P_{S-1, S} \\ P^{(s, n)} &= P^{(s, 0)} P_S^n \end{aligned} \right\} \quad (S = \text{Ⅰ}, \text{Ⅱ}, \dots, \text{Ⅴ}; n = 1, 2, \dots, n_S - 1) \quad (3 \cdot 3-18)$$

ただし季節間の推移行列 $\mathbf{P}_{s,s+1}$ には $(3 \cdot 3 - 14)$, $(3 \cdot 3 - 15)$ 式のような要素を用いる。

また、季節間の定常分布を求めるには、年間を通しての推移行列を、たとえば、第 I 季については

$$\mathbf{P}_{I,I} = \mathbf{P}_I^{n-1} \mathbf{P}_{I,II} \mathbf{P}_{II}^{n-1} \mathbf{P}_{II,III} \cdots \mathbf{P}_{L,I}^{n-1} \mathbf{P}_{L,I} \quad (3 \cdot 3 - 19)$$

のように採れば、以後は Case 1 と同様な方法によって計算ができる。

3. 3. 3 継続期間と渇水確率の関係

先述したように、いまの場合、 s 季では放流規則が $\min(m_s, Z_n^{(s)} + X_n^{(s)})$ であり、 $X_n^{(s)}$ は確率量であるから、貯水量 $Z_n^{(s)}$ が m_s を割れば、放流量が m_s を割る危険が生じる。計算の便宜上、これを逆に、計画の安全率という面から渇水確率と継続期間の関係を考えてみる。簡単のために、しばらく s を略しておく。

ある初期時点では貯水量が i ($\geq m$) であったとし、これが期間 n の間中絶対に渇水を生じない確率を求めるために、つぎのような $(n-1)$ 時点までは渇水しないで、 n 時点で j ($\geq m$) となる確率 $f_{ij}^{(n)}$ を定義しておく。

$$f_{ij}^{(n)} = p_r \{ Z_r \geq m \ (r=1, 2, \dots, n-1), Z_n = j \mid Z_0 = i \} \quad \left. \begin{array}{l} (n \geq 1, i, j = m, m+1, \dots, k-m) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (3 \cdot 3 \\ -20) \end{array}$$

いま、貯水量の単位期間ごとの推移行列 \mathbf{P} の成分を p_{ij} と記すと、上式は

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}^{k-m} p_{i_1 i} p_{i_2 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_{n-2}} \quad (n \geq 1; m \leq i, j \leq m-k)$$

と書けるから、ベクトル演算的には、 $f_{ij}^{(n)}$ は次式で与えられる $\mathbf{F}^{(n)}$ の i 行 j 列の成分として求められることになる。

$$\mathbf{F}^{(n)} = (f_{ij}^{(n)}) = \mathbf{A} / \mathbf{B}^{n-1}, \quad (m \leq i, j \leq m+k) \quad (3 \cdot 3-21)$$

ただし、 \mathbf{A} および \mathbf{B} は、 \mathbf{P} の $0 \sim (m-1)$ 列を 0 とおいた行列および $0 \sim (m-1)$ 行を 0 とおいた行列である。

したがって、初期に貯水量が $i (\geq m)$ であった貯水池が n 時点まで規定放流量 m を確保し続ける確率は次式で与えられる。

$$f_i^{(n)} = \sum_{j=m}^{k+m} f_{ij}^{(n)}, \quad (i = m, m+1, \dots, k+m) \quad (3 \cdot 3-22)$$

ところで、初期時点に貯水量が i である確率は定常的に w_i であるから、状態 i を経て n 時点までに漏水を生じない確率は $w_i f_i^{(n)}$ となる。以上の結果たとえば第 s 季で n_0 時点から (n_0+n) 時点までのどの時点かで漏水を生ずる確率 $F_s^{(n_0, n)}$ は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F_s^{(n_0, n)} &= 1 - \sum_{i=m}^{k+m} w_i^{(s, n_0)} f_{i,s}^{(n)} \\ &\quad (n_0 = 1, 2, \dots, n_s; n = 1, 2, \dots, n_s - n_0) \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 3-23)$$

ここに、 $w_i^{(s, n_0)}$ は s 季の n_0 時点での定常確率、および $f_{i,s}^{(n)}$ は (3・3-22) 式で $\mathbf{P} = \mathbf{P}_s$, $k = k_s$, $m = m_s$ とおいたものである。すなわち (3・3-23) 式によって漏水確率と継続期間の関係を求めることができる。

3・3・4 適用例

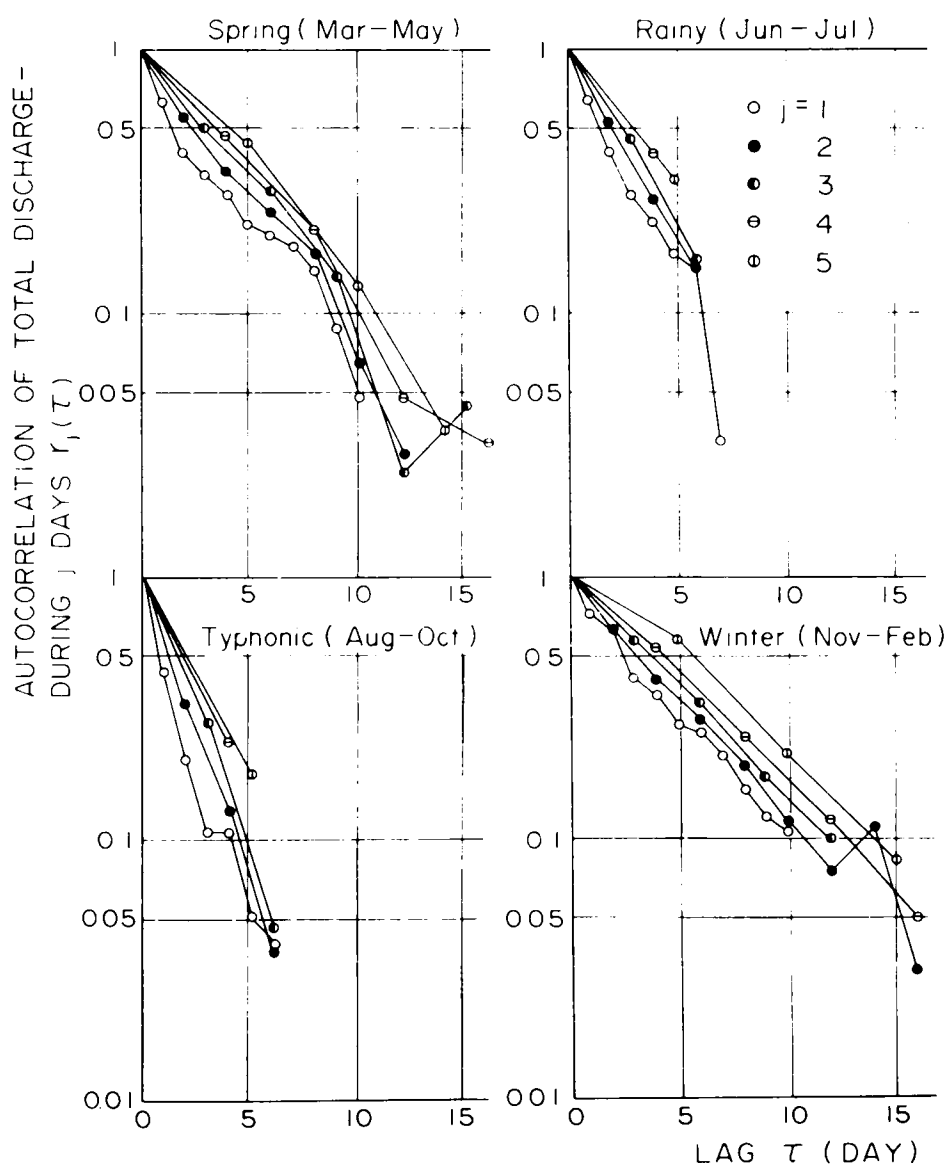
(1) 対象流域と計算手順

以上の理論を、四国、銅山川水系柳瀬ダムに適用した結果を述べる。この流域は集水面積約 146 km^2 ，年雨量約 $1,880 \text{ mm}$ （昭和29～37年の平均）で、総貯水池容量 $3,200 \text{ 万 m}^3$ である。計算の基礎資料として昭和29から37年までの9年間の日流量について、建設省の「多目的ダム管理年報」によった。

1) 流量系列のランダム化

まず，年間の流入量系列を季節的特徴によって分割する必要がある。厳密には1・2・2のような方法が採られるべきであるが，ここでは，簡単に月毎の日流量の平均値，標準偏差を考慮して，ほぼ冬期（11～2月），春期（3～5月），梅雨期（6～7月），台風期（8～10月）の4期に分けた。

図3・4-1 季節別の継続j日間総流量のコレログラム



つきに，これらの季節ごとの継続した j 日間総流量のコレログラムを (3・2-1)，(3・2-2) によって計算した結果が図 3・4-1 である。この図によれば，冬期の流量の持続性が最も大きく，春，梅雨，台風期の順に小さくなっていくことがわかり，かつ (3・2-3) 式のようなコレログラムの表示が近似的に許されよう。

そこで，それぞれの季節 s ，継続期間 j に対する低減係数 $\alpha_j^{(s)}$ を求め，許容誤差 $\sigma_a^2=0.9$ とした場合の予測可能期間 $p_j^{(s)}$ を (3・2-5) 式より求め，さらに実用的に意味のある予測可能期間を求める過程を図 3・4-2 に示した。

これより標本期間として冬では 10 日，春で 8 日，梅雨 6 日，台風 3 日以上にとればその間の総流量がほぼランダム化できることになる。

Ⅰ) 貯水池使用上の設定条件

こうしたランダム化された流入量系列について，季節ごとに確率分布型を調べ，いまの場合 g_j が正となる分布として対数正規分布で近似させた。

さて，柳瀬ダムの現用の使用計画である $m=3\text{m}^3/\text{sec}$ を検討したが，これでは全く渇水を生じないという計算結果を得た。そこで，使用水量をかなり増し，年間での貯水池容量を一定とした場合 (Case 1) と出水期に制限水位を仮定した場合 (Case 2) の 2 例について試算してみた。それぞれの条件を表 3・4-1 に示すが，水量の単位はいずれも $3\text{m}^3/\text{sec} \times 1\text{day}$ を採用している。なお，計算ステップは年間の総括的な様相を調べるために，年間を通じて一定値として 5 日ごとのステップを使っている。

図 3・4-2 ランダム化標本期間の計算 ($\sigma_a^2=0.9$)

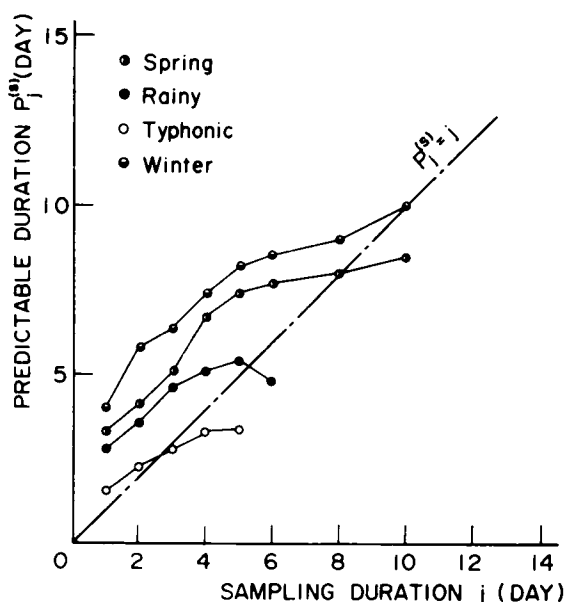


表 3 ・ 4 - 1

柳瀬ダムにおける渇水確率計算上の設定条件

季節 S	期 間	ステップ数 n_s	利水用貯水池容量 k^*	規定放流量 m^*
I	冬 期 (120日) 11月1日～ 2月28日	24	20	3
II	春 期 (95日) 3月1日～ 6月 3日	19		
III	梅 雨 期 (60日) 6月4日～ 8月 2日	12	20 (Case 1)	
IV	台 風 期 (90日) 8月3日～10月31日	18	16 (Case 2)	

* 単位は $3 \text{ m}^3 / \text{sec} \times 1 \text{ day}$

■) 貯水量の推移確率

さて、以上の条件の下に貯水量の定常分布を求め、それより季節的な渇水確率およびその継続期間との関連を計算するわけであるが、Case 1 についてその手順を示そう。

表 3 ・ 4 - 2

第 1 季における 5 日間隔ごとの貯水量の推移確率行列 P_1

→	0	1	2	3	4	5	•	16	17
0	0.9550	0.0229	0.0109	0.0040	0.0023	0.0016	•	0.0001	0.0001
1	0.8930	0.0620	0.0229	0.0109	0.0040	0.0023	•	0.0001	0.0002
2	0.7240	0.1690	0.0620	0.0229	0.0109	0.0040	•	0.0001	0.0003
3	0.0980	0.6260	0.1690	0.0620	0.0229	0.0109	•	0.0001	0.0004
4	0.0000	0.0980	0.6260	0.1690	0.0620	0.0229		0.0001	0.0005
5	0.0000	0.0000	0.0980	0.6260	0.1690	0.0620		0.0002	0.0006
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0980	0.6260	0.1690		0.0002	0.0008
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0980	0.6260		0.0003	0.0010
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0980		0.0004	0.0013
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000		0.0006	0.0017
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000		0.0010	0.0023
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000		0.0016	0.0033
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000		0.0023	0.0049
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000		0.0040	0.0072
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000		0.0109	0.0112
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000		0.0229	0.0221
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000		0.0620	0.0450
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000		0.1690	0.1070

まず，ランダム化された流量系列の確率分布を用い，各季節について5日間隔（1ステップ）ごとの貯水量の推移確率行列を求めた。その第Ⅰ季の P_I の1部が表3・4-2に示されている。つぎに，これを季節内の間隔の数だけかけ合わせたベクトル積，つまり，1季節ごとの推移行列としてⅠ季の P_I^{24} の1部が表3・4-3に示してある。なお，この P_I^{24} の例では各行が全く同じになるので，1行だけ書いてある。さらに年間を通しての推移行列は，たとえばⅠ季以後の1年では $P_{11} = P_I^{24} P_{II}^{19} P_{III}^{12} P_{IV}^{16}$ のようになり，これも各行が全く同じ値になるので，その1行だけを示すと表3・4-4のようになる。

表 3・4-3

第Ⅰ季における季節間の貯水量の推移確率行列 P_I^{24}

→	0	1	2	3	4	5	・	16	17
0	0.9238	0.0318	0.0170	0.0085	0.0054	0.0038	・	0.0018	0.0013
1	・	・	・	・	・	・	・	・	・
2	・	・	・	・	・	・	・	・	・

表 3・4-4

第Ⅰ季の初期より1年間の貯水量の推移確率行列

$$P_I = P_I^{24} P_{II}^{19} P_{III}^{12} P_{IV}^{16}$$

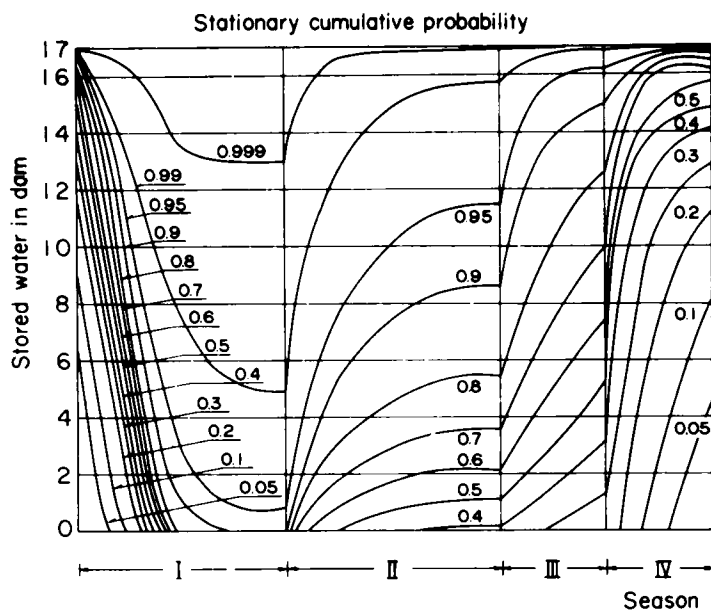
→	0	1	2	3	4	5	・	16	17
0	0.0078	0.0032	0.0038	0.0047	0.0059	0.0076	・	0.0959	0.3849
1	・	・	・	・	・	・	・	・	・
2	・	・	・	・	・	・	・	・	・

したがって，（3・3-9）式に以上の結果を代入して求められた貯水量の定常分布を，非超過確率で表現したのが図3・4-3(a)である。全く同様にCase 2についての計算結果が図3・4-3(b)である。これらの図から，（3・3-10）式で与えられる任意時点における渇水確率は，貯水量 $m-1=2 \text{ m}^3 \cdot \text{day}/\text{sec}$ に対応する非超過確率の値として読みとれる。いまの場合，冬期には水不足を起しやすく，逆に台風期ではあま

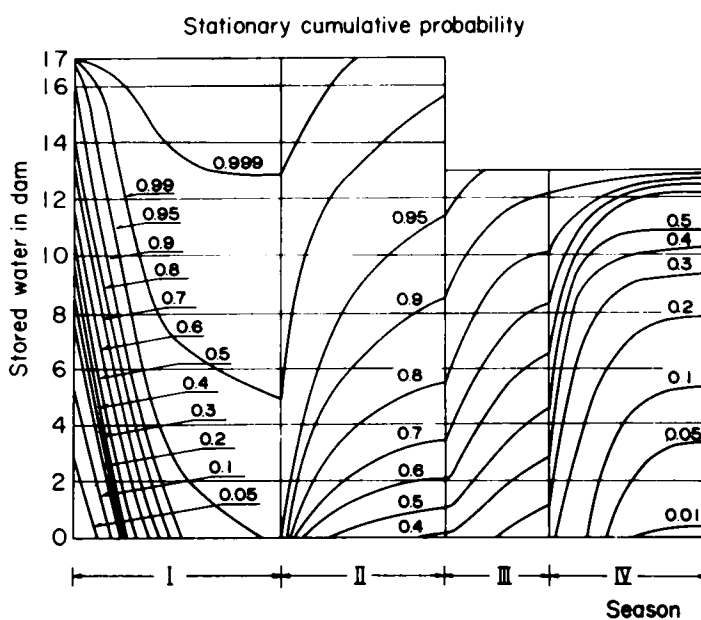
り不足しないことが確率的に示され、制限水位を設けた場合とそうでない
 場合は、この程度の制限では渇水状態にあまり差を生じないこともわか
 る。

図 3・4-3

(a) case 1 に対する貯水量の定常分布の非超過確率



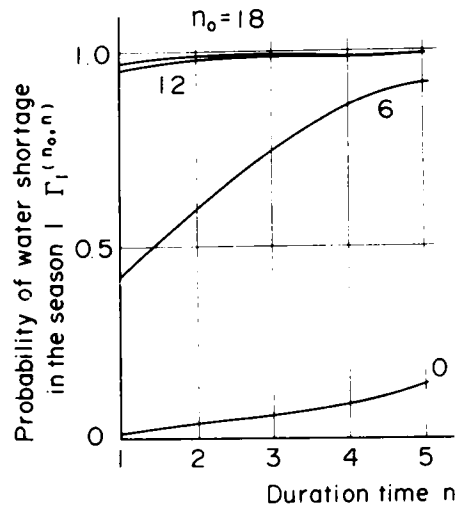
(b) case 2 に対する貯水量の定常分布の非超過確率



Ⅳ) 渇水確率と継続期間

最後に、渇水と継続期間との関係を求めた結果を示す。まず、1季節内での関係をみるために、 s 季節内のある時点 n_0 以後の継続期間 n の間でいつか渇水を生じる確率 $\Gamma_s^{(n_0, n)}$ を、たとえばⅠ季について計算した例が図 3・4-4 で、この場合には、冬期の初期では前の豊水期の影響でなかなか渇水にならないが、時間の経過につれて急速に渇水を生じるようになることがわかる。

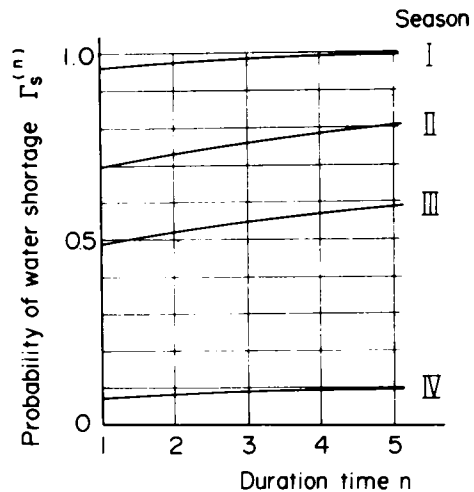
図 3・4-4
第Ⅰ季における初期時点 n_0 、継続期間 n と渇水確率 $\Gamma^{(n_0, n)}$ の関係



つぎに年間における季節的な特性をみるために、各季節の中間の時点 n_0 をとり、それ以後の期間 n と渇水確率 $\Gamma_s^{(n)}$ の関係を示したものが図 3・4-5 である。これより、季節Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳの順で経過期間に対して渇水を生じ難いことが確率的に示され、その傾向は図 3・4-3 の量的な傾向と一致していることがわかる。

図 3・4-5

各季節の中間時点からの継続期間 n と渇水確率 $\Gamma_s^{(n)}$ の関係



以上の結果を要約すると、この例では台風期・梅雨期ではほとんど渇水を生じないが、冬期には、量的にも期間的にもかなりの規模の渇水を生ずることが推定される。そのために、年間を通じて一定の規定放流量を設定することは好ましくなく、たとえば冬期には大巾に放流を制限せざるを得ないように思われる。

参 考 文 献

- 1) J. D. C. Little ; The use of storage water in a hydroelectric system , Journal of the Operations Research Society of America , vol. 3 , 1955 , pp. 187-197.
- 2) T. C. Koopmans ; Water storage in a simplified hydroelectric system , Proceeding of 1st International Conference on Operations Research , 1957.
- 3) N. U. Prabhu ; Queues and Inventories , Chap. 6 , Moran's model for the dam , 1965 , John Wiley & Sons , pp. 191-205.
- 4) 建設省河川局河川計画課訳；水資源開発総合計画，第3巻，昭和41年，pp. 146-153.
- 5) N. U. Prabhu ; Time-dependent results in storage theory , Journal of applied probability , vol. 1 , 1964 , pp. 1-46.
- 6) 長尾正志；貯水池をもつ河川の渇水確率について，京大防災研究所年報，第11号B，昭和43年3月，pp. 115-129.
- 7) 長尾正志・瀬古育二；自己相関からみた河川流出量の性格について，第22回土木学会年次学術講演概要，昭和42年，pp. 13-1~2.
- 8) たとえば，近藤次郎；経営と管理のための数学入門，日科技連，昭和37年3月，pp. 184-192.
- 9) たとえば，松田正一他；ORのための基礎数学入門，4巻 4・1マルコフ過程，昭和39年，丸善，pp. 138-143.

結 論

以上本論文では，水工計画における二変数統計的手法に関する基礎理論の開発およびその実際問題への適用を目的として，詳細な理論的考察および適用計算を行なったもので，これまで述べてきたことを要約するとつぎのようである。

緒論においては，まず，水工計画における水文量の多変数統計の意義を，計画基準の推移，治水・利水計画上の諸問題について考察し，ついで，多変数統計に関する研究動向を基礎理論，応用手法について概説することによって，水工計画上の二変数統計に関する本研究の方向を明らかにした。

第1編においては，二変数統計的手法に関する基礎理論の開発を行なった。第1章では，二変数正規分布の基礎的特性を述べ，二変数正規型変数の線型結合和の分布を誘導した。第2章では，水文量に広く適合性をもつ二変数ガンマ分布およびその特別な場合である二変数指数分布の基礎的特性を考察した。まず，一般的に，形状母数の異なる二変数ガンマ分布について，さらに形状母数の等しい二変数ガンマ分布の基礎的特性を明らかにし，また形状母数の等しい二変数ガンマ型変数の和の分布を誘導した。ついで実用上重要な二変数指数分布について，とくに詳細に基礎的特性を明らかにするとともに，和の分布を誘導した。さらに，実用上の便宜を考えて二変数指数分布の条件付非超過確率を計算し，結果を数表にまとめた。これらの基礎理論は，相関性を考慮した水文量の非対称分布に関する統計的处理において重要な役割を果たすものであると考えられる。

第3章では，以上の二変数分布を実際に使用するに必要な母数推定に関して理論的な研究を行なった。まず，全標本による母数推定において，最尤解および積率解を，二変数ガンマ分布および二変数指数分布について提示した。ついで，水文量の標本における部分標本の代表的なものとして，上位標本による母数推定について，二変数正規分布，二変数ガンマ分布および二変数指数分布を対象として考察し，まず制約付変量に関する母数推定，ついで残された母数の推定という手順で，実用的な母数推定法を提示した。

第4章では，各種の推定法による母数推定値の信頼性を，二変数指数分布

について、乱数を用いた数値実験によって検討した。まず、全標本による推定では、周辺分布の母数推定値については、推定結果は一般に良好なこと、および相関母数の推定については、最尤解が良好な結果を与えることを示した。ついで、部分標本による推定においては、一変量の上位標本による推定では、最尤解が良好な結果を与えるのに反し、標本相関係数による推定には、かなり問題があることを明らかにした。また、二変量の上位標本による推定においては、どの推定法によっても相関母数の良好な推定結果が得難いことおよび回帰特性の推定結果などからみて、このような部分標本の選び方は好ましくないことを実証的に示した。さらに、周辺分布の非超過確率を変えないという条件で、二変数指数標本から二変数正規標本へ、あるいはその逆の変換を行なうと、変換後の相関係数が変換前に比べて小さくなることがわかった。

第2編においては、以上の二変数統計的手法を水工計画へ応用する具体的方法を2、3の問題について考察した。第1章では、水工計画全般における基礎資料の整備に関連して、水文資料の模擬発生に関する問題を扱った。まず、水工計画における模擬発生手法の有用性を議論し、その基礎となる水文資料時系列の季節性を勘案したモデル化に関して、具体例を通じて、年周期性の検出および年間の季節分割についての手法を提示した。ついで、二変数統計の立場から、模擬発生の具体的手法を考察し、二変数指数分布を使った短時間強雨の模擬発生を例として、確率雨量さらに計画高水流量の推定を行った。

第2章においては、治水計画に関連して、水系の安全性と洪水処理施設の操作・配置の最適化に関する問題を取扱った。まず、治水計画上の安全性を二変数統計という立場で処理する場合の問題点を明らかにし、計画基本量による高水生起の確率表示、洪水処理による高水変形の定式化を通じて、洪水処理施設の治水機能を確率論的に評価する方法を提示した。また、洪水調節池および堤防による洪水処理施設を例とし、二変数正規分布を使った計算によって、二変数統計的手法の有効性を明らかにした。ついで、洪水調節池の操作の最適化として、最適調節率の選定、調節可能範囲の選別を考察し、また、二支川が合流して本川になり、それぞれに防護対象地域を有する水系に

おける各河道間の計画高水流量の配分に対する考察を行ない，実例についての検討を行なった。

第3章においては，利水計画に関連して，利水用貯水池による渇水補給の問題を扱ったが，その際，流量時系列に相関性を考慮すると，二変数統計問題となりその解析は困難になるので，これを一変数問題として処理する方法を示した。すなわち，ランダム流入量を受ける貯水池の貯水量変化を在庫問題として扱ったMoranのモデルを拡張し，流入量分布に季節性を考慮した場合の流入量系列をランダム化する手法を示した後，規定放流量や利水用貯水池容量の操作規則が年間で一定の場合と変化する場合について，渇水確率の推定方法，さらに，渇水確率と継続期間との相互関係の評価方法などを示し，適用例を通じて問題処理の具体的手法を明らかにした。

以上，要するに本研究では，水工計画における計画基準の合理的策定に関して，二変数統計的な立場から統一的に論じ，従来かなり経験的に行なわれてきたこの分野の研究に一つの方向を示した。しかしながら，現実の水工計画においては勘案すべき要因は，一般に数多く，しかもそれらの相互関係も複雑多岐にわたるから，さらに，普遍性のある多変数統計的手法への拡張，推定母数の検定理論の開発，二変数極値分布への展開など多くの問題が残されており，今後研究を進める必要があるが，本研究がこうした研究に対する一つの基礎となるものと考えている。

最後に，本研究にあたり，終始御指導・御鞭撻を賜った石原藤次郎教授，石原安雄教授，角屋睦教授に対して深く謝意を表する次第である。

二変数指数分布における条件付非超過確率の数表

表 1・1 ~ 1・9 , 2・1 ~ 2・9

ξ および η に対する $F(\xi|\eta)$ の数値表

$$\begin{aligned} F(\xi|\eta) &= \int_0^\xi f(\xi|\eta) d\xi \\ &= \frac{1}{1-\rho} \exp\left(-\frac{\rho\eta}{1-\rho}\right) \int_0^\xi \exp\left(-\frac{\xi}{1-\rho}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\xi\eta}\right) d\xi \end{aligned}$$

ρ , ξ および η に対する $F(\xi|\eta)$ の数表

注：表中の数値 199263 は 199263×10^{-6} を意味する。

表 1・1 $\rho = 0.1$

$\xi \backslash \eta$	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.05	54041	52600	51198	49834	48506	47213	45955	44730	43537	42377	41248	40148	39078
0.10	105161	102435	99779	97193	94673	92219	89828	87499	85231	83021	80868	78771	76729
0.15	153518	149649	145877	142199	138615	135120	131713	128392	125155	121998	118922	115922	112999
0.20	199263	194380	189617	184970	180436	176013	171698	167489	163382	159375	155466	151653	147932
0.25	242535	236760	231121	225615	220240	214992	209868	204866	199981	195213	190557	186012	181574
0.50	426247	417481	408889	400468	392215	384127	376200	368431	360818	353357	346045	338880	331859
0.75	565402	555423	545605	535945	526442	517093	507897	498851	489953	481201	472592	464126	455800
1.00	670807	660710	650736	640887	631161	621558	612075	602714	593472	584349	575344	566456	557684
1.25	750618	741069	731572	722157	712826	703577	694413	685332	676335	667423	658594	649851	641192
1.50	811135	802101	793119	784186	775306	766476	757693	748954	740264	731618	723021	714479	705988
1.75	856933	847209	837493	827786	818091	808409	810741	803090	795456	787842	780248	772676	765128
2.00	891632	881933	872215	862480	852731	842969	833196	823414	813624	803829	794031	784229	774427
2.25	917915	912195	906438	900645	894818	888960	883071	877154	871212	865245	859254	853243	847212
2.50	937821	933000	928127	923206	918238	913225	908170	903073	897936	892762	887551	882306	877027
2.75	952901	948577	944193	939755	935262	930716	926127	921494	916817	912097	907332	902522	897667
3.00	961326	960993	957599	954147	950637	947071	943450	939776	936048	932270	928440	924563	920637
3.25	972978	970238	967437	964578	961661	958687	955657	952572	949433	946240	942996	939700	936354
3.50	979532	977292	974995	972641	970231	967765	965245	962671	960043	957363	954631	951848	949014
3.75	984496	982675	980800	978872	976891	974857	972772	970635	968448	966210	963921	961584	959197
4.00	988256	986782	985259	983686	982065	980396	978678	976913	975100	973240	971332	969378	967377
4.25	991105	989916	988683	987406	986085	984720	983311	981858	980361	978822	977238	975612	973942
4.50	993262	992107	990912	989679	988406	987094	985742	984351	982920	981450	980041	978592	977103
4.75	994896	994131	993332	992498	991629	990725	989787	988813	987805	986761	985681	984567	983416
5.00	996134	995523	994882	994211	993509	992778	992015	991222	990398	989542	988655	987736	986786
5.25	997072	996585	996072	995533	994969	994377	993759	993115	992443	991744	991017	990262	989479
5.50	997778	997395	996986	996554	996101	995624	995124	994602	994056	993486	992891	992273	991629
5.75	998320	998013	997687	997342	996979	996596	996192	995769	995326	994863	994378	993872	993345
6.00	998728	998484	998225	997950	997659	997352	997027	996686	996327	995951	995556	995143	994712
6.25	999036	998841	998639	998420	998187	997931	997680	997405	997114	996810	996489	996153	995801
6.50	999270	999118	998956	998781	998596	998399	998190	997968	997714	997488	997228	996955	996668
6.75	999447	999327	999199	999061	998913	998756	998588	998410	998221	998023	997812	997591	997357
7.00	999581	999487	999386	999276	999159	999033	998899	998756	998605	998444	998274	998095	997905
7.25	999683	999609	999529	999442	999349	999249	999141	999028	998906	998777	998639	998494	998341
7.50	999760	999702	999639	999570	999496	999417	999331	999240	999142	999038	998928	998811	998686
7.75	999818	999772	999723	999669	999610	999547	999479	999406	999328	999246	999155	999061	998960
8.00	999862	999826	999788	999745	999699	999648	999594	999536	999473	999406	999335	999259	999177
8.25	999896	999868	999837	999804	999767	999727	999684	999638	999587	999534	999476	999415	999350
8.50	999921	999899	999875	999849	999820	999788	999754	999717	999677	999634	999588	999539	999486
8.75	999940	999923	999905	999884	999861	999836	999808	999779	999747	999713	999676	999636	999594
9.00	999955	999941	999927	999910	999892	999872	999851	999828	999802	999775	999745	999714	999679
9.25	999966	999955	999944	999931	999917	999901	999884	999866	999846	999824	999800	999774	999747
9.50	999974	999966	999957	999947	999936	999923	999910	999895	999879	999862	999843	999822	999800
9.75	999980	999974	999967	999959	999950	999941	999930	999919	999906	999892	999876	999860	999843
10.00	999985	999980	999975	999969	999962	999954	999945	999937	999926	999915	999903	999890	999876
10.50	999992	999988	999985	999982	999977	999973	999967	999962	999955	999948	999940	999932	999923
11.00	999995	999993	999992	999989	999987	999984	999980	999977	999973	999968	999963	999958	999952
11.50	999997	999996	999995	999994	999992	999990	999988	999986	999983	999980	999977	999974	999970
12.00	999998	999998	999997	999996	999995	999994	999993	999992	999990	999988	999986	999984	999982
12.50	999999	999999	999999	999998	999997	999997	999995	999995	999994	999993	999991	999990	999989
13.00	999999	999999	999999	999999	999998	999998	999997	999997	999996	999995	999995	999994	999993
13.50					999999	999999	999998	999998	999997	999997	999997	999996	999996
14.00					999999	999999	999999	999999	999999	999999	999998	999998	999997
15.00									999999	999999	999999	999999	999999

$\xi \backslash \eta$	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.05	37023	35075	33230	31482	28258	25363	22765	20433	18339	14774	11902	9588	7724
0.10	72801	69074	65538	62183	55978	50392	45363	40835	36759	29785	24134	19554	15842
0.15	107370	102021	96938	92107	83155	75070	67771	61179	55227	45001	36665	29870	24333
0.20	140762	133938	127443	121262	109781	99384	89967	81438	73716	60391	49466	40512	33173
0.25	173011	164850	157071	149657	135855	123318	111931	101589	92198	75925	62510	51453	42343
0.50	318237	305158	292601	280545	257864	236968	217722	200000	183685	154855	130456	109827	92399
0.75	439559	423854	408670	393992	336093	340043	315733	293058	271919	233876	200905	172377	147735
1.00	540484	523738	507437	491574	461128	432334	405128	379443	355214	310865	271575	236857	206256
1.25	624128	607402	591015	574964	543869	514101	485641	458464	432541	384334	340743	301471	266206
1.50	693216	677192	661393	645823	615385	585905	557402	529886	503365	453301	407157	364825	326152
1.75	750108	735196	720402	705735	676813	648485	620800	593798	567511	517181	469948	425874	384956
2.00	796828	783245	769688	756169	729286	702671	676391	650505	625064	575692	528562	483871	444746
2.25	835099	822928	810710	798458	773894	749321	724817	700450	676284	628779	582688	538312	495876
2.50	866377	855613	844747	833791	811652	789281	766759	744160	721550	676553	632212	588895	546901
2.75	891885	882468	872909	863219	843488	823357	802902	782196	761308	719237	677160	635479	594537
3.00	912647	904482	896148	887657	870238	852298	833906	815130	796035	757135	717668	678046	638635
3.25	929516	922489	915280	907897	892643	876787	860392	843517	826221	790593	753944	716676	679154
3.50	943198	937190	930996	924620	911354	897442	882935	867885	852343	819982	786248	751516	716136
3.75	954779	949171	943879	938406	926938	914808	902057	888726	874857	845679	814869	782763	749688
4.00	963338	958918	954420	949746	939887	929370	918227	906489	894190	868054	840108	810646	779961
4.25	970474	966835	963029	959057	950621	941548	931860	921581	910736	887462	862272	835413	807141
4.50	976309	973257	970050	966687	959500	951708	943326	934368	924853	904237	881659	857318	831431
4.75	981009	978458	975765	972930	966830	960166	952944	945173	936863	918690	898556	876617	853049
5.00	984790	982665	980412	978029	972871	967193	960994	954279	947053	931103	913234	893557	872212
5.25	987829	986064	984185	982188	977841	973019	967718	961937	955676	941736	925944	908378	889139
5.50	990269	988807	987244	985576	981922	977840	973322	968362	962958	950819	936919	921303	904039
5.75	992226	991018	989721	988331	985269	981821	977984	973742	969093	958559	946370	932542	917115
6.00	993794	992798	991724	990569	988010	985109	981856	978239	974251	965139	954488	942288	928554
6.25	995049	994230	993343	992386	990251	987816	985066	981990	978579	970722	961444	950717	938535
6.50	996053	995381	994650	993858	992082	990041	987723	985114	982205	975448	967391	957989	947220
6.75	996856	996305	995704	995049	993575	991869	989919	987712	985236	979442	972464	964249	954759
7.00	997497	997046	996553	996013	994791	993368	991732	989868	987767	982810	976783	969625	961287
7.25	998009	997640	997236	996792	995781	994596	993225	991656	989876	985645	980454	974233	966928
7.50	998417	998116	997785	997421	996586	995601	994455	993136	991631	988029	983567	978174	971791
7.75	998742	998497	998227	997928	997239	996422	995466	994359	993090	990029	986202	981539	975976
8.00	999001	998801	998581	998336	997769	997093	996297	995369	994301	991704	988431	984407	979570
8.25	999207	999045	998866	998665	998199	997640	996977	996202	995304	993106	990111	986847	982651
8.50	999371	999239	999094	998930	998547	998085	997535	996888	996135	994278	991895	988919	985287
8.75	999501	999395	999276	999143	998829	998448	997992	997452	996822	995255	993228	990677	987539
9.00	999604	999518	999422	999313	999057	998743	998365	997916	997389	996070	994349	992165	989460
9.25	999686	999617	999539	999450	999241	998982	998670	998297	997857	996748	995289	993423	991095
9.50	999752	999695	999633	999560	999389	999177	998919	998610	998242	997311	996076	994485	992486
9.75	999804	999758	999707	999649	999509	999335	999122	998866	998560	997779	996736	995381	993667
10.00	999845	999808	999767	999719	999605	999463	999288	999075	998821	998168	997287	996135	994668
10.50	999903	999879	999853	999821	999745	999650	999532	999387	999211	998755	998131	997302	996232
11.00	999940	999924	999907	999886	999836	999773	999693	999595	999474	999157	998717	998124	997349
11.50	999962	999952	999942	999928	999895	999853	999799	999733	999650	999431	999123	998701	998142
12.00	999977	999970	999964	999954	999933	999905	999869	999824	999768	999617	999402	999103	998702
12.50	999986	999982	999977	999971	999957	999939	999915	999885	999846	999743	999594	999382	999097
13.00	999991	999988	999986	999982	999972	999961	999945	999925	999899	999828	999725	999576	999373
13.50	999995	999993	999991	999989	999982	999974	999964	999951	999933	999885	999814	999710	999567
14.00	999997	999996	999995	999993	999989	999984	999977	999968	999956	999923	999875	999802	999701
15.00	999999	999999	999998	999998	999996	999993	999990	999987	999981	999966	999944	999909	999859
16.00				999999	999998	999997	999996	999994	999992	999985	999975	999958	999935
17.00					999999	999999	999999	999998	999997	999993	999990	999981	999970
18.00								999999	999998	999997	999996	999992	999987

表 1·2 $\rho = 0.2$

$\eta \backslash \xi$	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.05	60587	57026	53675	50520	47551	44756	42126	39650	37319	35125	33061	31117	29288
0.10	117503	110807	104491	98536	92919	87622	82626	77915	73473	69283	65332	61606	58092
0.15	170971	161526	152601	144167	136199	128669	121555	114833	108481	102480	96810	91452	86390
0.20	221199	209357	198146	187531	177482	167969	158963	150437	142366	134726	127493	120647	114167
0.25	268384	254465	241262	228737	216857	205588	194900	184763	175149	166031	157383	149183	141406
0.50	464739	444273	424671	405898	387921	370709	354230	338456	323358	308909	295082	281852	269194
0.75	608394	585827	564002	542902	522507	502800	483762	465375	447620	430481	413939	397977	382578
1.00	713495	691374	669776	648699	628140	608095	588560	569529	550997	532958	515406	498333	481732
1.25	790389	770061	750024	730290	710866	691762	672984	654538	636428	618660	601235	584156	567426
1.50	846645	828712	810870	793134	775523	758053	740737	723590	706623	689847	673272	656909	640764
1.75	887803	872423	856975	841482	825963	810439	794926	779444	764007	748632	733331	718119	703008
2.00	917915	904993	891893	878636	865245	851737	838133	824452	810710	796924	783111	769285	755461
2.25	939945	929258	918323	907160	895787	884224	872488	860597	848568	836417	824160	811812	799389
2.50	956063	947334	938319	929036	919500	909727	899734	889535	879146	868581	857855	846983	835977
2.75	967855	960796	953439	945798	937884	929711	921292	912638	903764	894681	885402	875938	866303
3.00	976482	970821	964867	958630	952119	945343	938313	931036	923526	915790	907838	899682	891330
3.25	982794	978286	973501	968446	963127	957551	951724	945653	939346	932810	926052	919081	911903
3.50	987412	983843	980020	975949	971631	967071	962273	957240	951980	946496	940793	934877	928755
3.75	990790	987979	984941	981679	978192	974484	970555	966408	962046	957472	952690	947702	942513
4.00	993262	991058	988655	986052	983250	980248	977047	973647	970050	966253	962266	958085	953712
4.25	995070	993149	991455	989387	987145	984726	982129	979353	976400	973268	969957	966469	962803
4.50	996393	995054	993566	991930	990142	988199	986101	983845	981430	978855	976120	973223	970165
4.75	997361	996122	995157	993866	992445	990891	989202	987374	985408	983299	981048	978652	976111
5.00	998070	997265	996356	995340	994214	992975	991619	990143	988547	986827	984981	983007	980904
5.25	998588	997967	997259	996462	995572	994586	993501	992314	991022	989623	988114	986494	984759
5.50	998967	998489	997939	997315	996613	995831	994965	994012	992970	991836	990607	989280	987854
5.75	999244	998877	998451	997963	997411	996793	996103	995340	994502	993584	992585	991503	990334
6.00	999447	999165	998835	998455	998023	997534	996986	996377	995704	994964	994154	993273	992318
6.25	999595	999380	999125	998829	998490	998105	997671	997185	996646	996051	995397	994681	993902
6.50	999704	999539	999343	999113	998848	998545	998202	997815	997384	996906	996379	995799	995166
6.75	999784	999658	999506	999328	999121	998883	998612	998305	997962	997579	997154	996686	996172
7.00	999842	999745	999630	999491	999330	999144	998930	998687	998413	998107	997766	997388	996972
7.25	999884	999811	999722	999615	999490	999344	999176	998983	998766	998521	998248	997944	997608
7.50	999915	999860	999791	999709	999611	999497	999365	999213	999041	998846	998627	998383	998112
7.75	999938	999896	999843	999780	999704	999615	999512	999391	999255	999100	998925	998729	998511
8.00	999955	999923	999882	999833	999775	999705	999624	999530	999422	999299	999159	999002	998827
8.25	999967	999943	999912	999874	999829	999775	999711	999637	999552	999454	999343	999217	999077
8.50	999976	999957	999934	999905	999870	999828	999778	999719	999652	999575	999487	999386	999274
8.75	999982	999968	999950	999928	999901	999868	999830	999784	999731	999670	999600	999520	999429
9.00	999987	999977	999963	999946	999925	999899	999870	999833	999792	999743	999688	999624	999552
9.25	999991	999983	999972	999959	999943	999923	999900	999871	999839	999801	999757	999706	999648
9.50	999993	999987	999979	999969	999957	999941	999923	999901	999875	999845	999811	999770	999724
9.75	999995	999990	999984	999977	999967	999955	999941	999924	999904	999880	999853	999821	999784
10.00	999996	999993	999988	999982	999975	999966	999955	999941	999926	999907	999886	999860	999831
10.50	999998	999996	999993	999990	999986	999980	999974	999965	999956	999944	999932	999915	999897
11.00	999999	999998	999996	999994	999992	999988	999985	999979	999974	999967	999959	999949	999937
11.50		999999	999998	999997	999995	999993	999991	999988	999985	999980	999976	999969	999961
12.00			999999	999998	999997	999996	999995	999993	999991	999988	999986	999981	999976
12.50				999999	999998	999998	999997	999996	999995	999993	999992	999989	999985
13.00					999999	999999	999998	999997	999997	999996	999995	999993	999991
13.50						999999	999999	999999	999998	999998	999998	999996	999994
14.00							999999	999999	999999	999999	999999	999997	999997
15.00												999999	999999

$\xi \backslash \eta$	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.05	25946	22985	20362	18038	14156	11109	8717	6841	5368	3305	2035	1253	771
0.10	51653	45927	40836	36308	28701	22686	17931	14171	11199	6993	4365	2724	1700
0.15	77090	68788	61377	54736	43591	34694	27608	21967	17475	11056	6991	4418	2791
0.20	102276	91529	81946	73361	58785	47093	37718	30203	24179	15486	9910	6337	4049
0.25	127038	114119	102504	92062	74242	59850	48231	38855	31291	20276	13122	8483	5478
0.50	245503	223830	204012	185897	154225	127816	105826	87537	72344	49286	33473	22668	15310
0.75	353403	326283	301094	277715	235934	200088	169408	143211	120887	85786	60574	42579	29807
1.00	449917	419898	391607	364977	316418	274660	236149	203351	174764	128379	93683	67959	49034
1.25	535012	503993	474362	446700	393596	346343	303751	265790	230016	170651	131891	98137	72849
1.50	609160	578511	548852	520120	466083	416761	370414	328777	290931	226555	174403	134094	100941
1.75	673135	643796	615062	586993	533044	482249	434781	390719	350062	278664	219605	171512	132868
2.00	727876	700450	673281	646447	594061	543757	495876	450672	408230	332007	267112	212828	168099
2.25	774371	749213	724012	698861	649024	600268	553045	507704	464506	385191	315801	256273	206047
2.50	813619	790886	767874	744676	698050	651619	605896	561306	518191	437383	364840	301101	246102
2.75	846564	826279	805537	784424	741408	697838	654248	611101	568788	487911	413501	346613	287652
3.00	874081	856152	837680	818682	779466	739092	698081	656904	615976	536254	461163	392176	330109
3.25	896962	881294	864964	848037	812650	775643	737499	699472	659576	582027	507318	437230	372924
3.50	915912	902313	888011	873057	834412	797812	760966	723966	685527	624968	551561	481273	415594
3.75	931517	919828	907393	894281	866206	830958	795905	760320	723586	664918	593588	523967	457675
4.00	944405	934368	923636	912309	887477	854450	821431	788738	756652	701807	633182	564928	497783
4.25	954947	946398	937171	927291	905642	881658	855574	827652	798167	735637	670205	603930	538595
4.50	963564	956320	948430	939932	921095	899939	876645	851418	824484	776468	704589	640792	576448
4.75	970590	964480	957780	950493	931184	915611	894953	872303	847859	794405	736322	675397	613337
5.00	976504	971172	965501	959288	945237	929049	910791	890573	868523	819586	765438	707679	647913
5.25	980941	976647	971864	966591	954540	940482	924444	906489	886709	842169	792009	737620	680471
5.50	984636	981115	977100	972639	962445	950190	936167	920301	902648	862331	816137	765241	710954
5.75	987729	984754	981394	977634	968874	953408	946300	932244	916563	880254	837943	790592	739341
6.00	990176	987712	984908	981750	974323	965345	954759	942535	928669	896122	857566	813750	765641
6.25	992146	990110	987778	985134	978857	971183	962039	951374	939163	910118	875150	834811	789895
6.50	993730	992072	990118	987911	982622	976084	968213	958943	948232	922419	890846	852886	812160
6.75	995000	993622	992021	990184	985741	980189	972435	963466	956615	933195	904807	871093	832515
7.00	996018	994888	993567	992042	988320	983618	977842	970910	962758	942603	917186	886557	851050
7.25	996833	995908	994821	993557	990447	986477	981551	975586	968508	950794	928111	900407	867842
7.50	997483	996729	995835	994791	991499	988855	984666	978547	971423	957904	937738	912768	883060
7.75	998063	997488	996655	995794	993639	990829	987277	982896	977612	964058	946190	923767	896749
8.00	998416	997916	997317	996608	994820	992465	989460	985722	981174	967351	953591	931222	909041
8.25	998715	998340	997851	997268	995788	993818	991382	988100	984197	971950	960054	942151	920044
8.50	999007	998678	998280	997803	996579	994936	992800	990097	986756	977883	965682	949761	929863
8.75	999215	998949	998625	998234	997225	995856	994062	991772	988919	981255	970572	956555	938602
9.00	999380	999165	998902	998583	997751	996614	995109	993174	990743	984140	974811	962129	946358
9.25	999511	999337	999124	998863	998180	997237	995978	994345	992279	986602	978477	967470	953224
9.50	999614	999474	999302	999090	998529	997748	996696	995321	993569	988700	981640	971959	959287
9.75	999696	999584	999444	999272	998812	998166	997290	996135	994650	990484	984363	975870	964628
10.00	999761	999671	999558	999418	999042	998509	997779	996810	995556	991998	986704	979271	969322
10.50	999852	999794	999721	999629	999378	999017	998515	997837	996946	994366	990431	984775	977041
11.00	999909	999872	999824	999764	999598	999355	999011	998540	997911	996055	993153	988887	982927
11.50	999944	999920	999890	999851	999712	999578	999344	999019	998578	997251	995127	991915	987381
12.00	999965	999951	999931	999906	999834	999725	999567	999343	999037	998094	996550	994179	990727
12.50	999979	999970	999957	999941	999894	999822	999715	999562	999350	998685	997570	995830	993223
13.00	999987	999981	999973	999963	999933	999884	999813	999710	999563	999096	998295	997014	995073
13.50	999992	999989	999983	999977	999957	999925	999878	999808	999707	999381	998810	997876	996436
14.00	999995	999995	999990	999986	999973	999952	999921	999874	999805	999587	999173	998497	997434
15.00	999998	999998	999996	999995	999990	999980	999967	999946	999914	999806	999605	999256	998687
16.00	999999	999999	999998	999998	999996	999992	999987	999977	999962	999912	999814	999638	999339
17.00			999999	999999	999999	999999	999997	999995	999991	999984	999961	999914	999826
18.00				999999	999999	999999	999999	999999	999997	999993	999983	999960	999918

表 1.3 $\rho = 0.3$

$\xi \backslash \eta$	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.05	68937	62167	56062	50556	45591	41113	37075	33433	30149	27187	24516	22108	19936
0.10	133122	120492	109059	98708	89339	80857	73179	66230	59939	54244	49090	44425	40203
0.15	192882	175210	159151	144559	131299	119251	108305	98359	89324	81116	73659	66886	60733
0.20	248523	226543	206494	188207	171528	156317	142447	129798	118266	107752	98167	89429	81464
0.25	300328	274699	251233	229749	210081	192079	175604	160527	146731	134108	122561	111999	102338
0.50	510458	474257	440482	408984	379623	352266	326787	303066	280990	260454	241356	223602	207103
0.75	657481	619130	582679	548068	515237	484121	454657	426780	400425	375529	352026	329854	308952
1.00	760349	724235	689275	655491	622897	591499	561296	532283	504446	477770	452236	427822	404500
1.25	832323	800441	769014	738117	707817	678167	649215	620999	593549	566890	541040	516011	491811
1.50	882681	855662	828546	801436	774424	747590	721009	694746	668859	643398	618408	593928	569988
1.75	917915	895653	872912	849799	826411	802837	779161	755461	731807	708263	684888	661735	638852
2.00	942568	924599	905921	886628	866810	846552	825936	805039	783932	762684	741358	720012	698702
2.25	959816	945540	930441	914597	898082	880970	863331	845236	826750	807937	788859	769572	750133
2.50	971885	960682	948630	935785	922205	907946	893067	877626	861677	845278	828480	811338	793902
2.75	980329	971626	962104	951800	940753	929006	916601	903582	889994	875881	861288	846259	830838
3.00	986237	979532	972072	963878	954974	945387	935146	924281	912826	900813	888277	875254	861779
3.25	990370	985241	979438	972971	965849	958088	949703	940716	931145	921016	910352	899180	887527
3.50	993263	989362	984876	979803	974145	967905	961091	953712	945780	937309	928314	918814	908827
3.75	995286	992134	988885	984928	980459	975473	969971	963953	957425	950391	942861	934846	926355
4.00	996702	994478	991838	988767	985255	981292	976874	971996	966655	960851	954593	947876	940709
4.25	997693	996024	994011	991638	988890	985756	982227	978293	973949	969191	964016	958423	952412
4.50	998386	997138	995609	993782	991641	989173	986366	983210	979694	975812	971558	966926	961915
4.75	998871	997941	996783	995381	993720	991784	989561	987038	984206	981054	977574	973759	969603
5.00	999210	998519	997645	996573	995287	993774	992020	990013	987740	985192	982358	979230	975801
5.25	999447	998935	998277	997459	996468	995288	993910	992318	990502	988450	986152	983599	980781
5.50	999613	999234	998740	998118	997355	996440	995359	994101	992655	991009	989153	987077	984771
5.75	999730	999449	999079	998607	998022	997313	996468	995477	994329	993014	991519	989838	987959
6.00	999811	999604	999328	998970	998523	997974	997316	996538	995629	994581	993382	992025	990499
6.25	999868	999716	999509	999239	998897	998475	997963	997351	996636	995803	994845	993753	992517
6.50	999908	999796	999642	999438	999178	998853	998456	997979	997415	996755	995991	995115	994118
6.75	999936	999853	999739	999586	999387	999138	998831	998459	998017	997495	996887	996186	995385
7.00	999955	999895	999810	999695	999544	999353	999116	998827	998480	998069	997587	997028	996385
7.25	999969	999914	999861	999775	999661	999515	999332	999108	998837	998513	998132	997687	997172
7.50	999978	999946	999899	999834	999748	999636	999496	999322	999111	998857	998556	998203	997792
7.75	999985	999961	999927	999878	999813	999728	999620	999485	999321	999122	998885	998606	998278
8.00	999989	999972	999947	999910	999861	999796	999714	999610	999483	999327	999141	998920	998660
8.25	999993	999980	999961	999934	999897	999848	999784	999704	999606	999485	999338	999164	998958
8.50	999995	999986	999972	999952	999924	999886	999838	999776	999700	999606	999491	999354	999191
8.75	999996	999990	999980	999965	999943	999915	999878	999831	999775	999699	999609	999501	999372
9.00	999998	999993	999985	999974	999958	999937	999908	999872	999827	999770	999700	999616	999514
9.25	999998	999995	999989	999981	999969	999953	999931	999903	999869	999824	999770	999704	999624
9.50	999999	999996	999992	999986	999977	999965	999948	999927	999901	999866	999824	999772	999709
9.75		999998	999995	999990	999983	999974	999961	999945	999925	999898	999866	999825	999776
10.00		999998	999996	999993	999988	999980	999971	999959	999943	999923	999897	999866	999827
10.50		999999	999998	999996	999993	999989	999983	999976	999967	999955	999940	999921	999898
11.00			999999		999998	999994	999990	999986	999974	999966	999954	999940	999924
11.50				999999	999998	999996	999994	999992	999990	999985	999980	999973	999964
12.00					999999	999998	999997	999995	999994	999992	999989	999984	999979
12.50						999999	999998	999997	999997	999995	999994	999991	999988
13.00							999999	999998	999998	999997	999997	999995	999993
13.50								999999	999999	999999	999998	999997	999996
14.00									999999	999999	999999	999998	999998
15.00											999999	999999	

$\xi \backslash \eta$	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.05	16211	13182	10718	8715	5761	3809	2518	1664	1100	480	210	92	40
0.10	32922	26958	22073	18072	12112	8116	5436	3641	2438	1092	489	219	98
0.15	50068	41270	34014	28030	19027	12910	8755	5935	4021	1844	844	386	176
0.20	67588	56063	46492	38548	26413	18180	12470	8548	5855	2742	1281	597	278
0.25	85423	71281	59461	49586	34453	23912	16578	11482	7945	3793	1805	856	405
0.50	177541	152060	130123	111258	81146	59010	42797	30961	22346	11567	5942	3032	1537
0.75	270717	236857	206938	180556	136937	103378	77716	58200	43431	23955	13065	7055	3777
1.00	361027	321579	285900	253727	198848	154901	120009	92516	70998	41305	23687	13416	7515
1.25	445909	403115	363963	327753	264213	211464	168151	132925	104515	63688	38159	22530	13132
1.50	523837	480117	438926	400309	330759	271087	220562	178268	143213	90937	56654	34717	20968
1.75	594061	550802	509294	469697	396635	332007	275711	227312	186174	122687	79180	50185	31306
2.00	656387	614768	574143	534753	460399	392725	332190	278836	232407	158417	105595	69030	44360
2.25	711002	671847	633002	594754	520985	452014	388760	331686	280910	197502	135622	91231	60264
2.50	758344	722176	685737	649130	577660	508922	444371	384821	330719	239255	168881	116664	79068
2.75	798997	766098	732460	698382	629970	562744	498173	437333	380946	282962	204915	145114	100744
3.00	833619	804084	773457	742012	677691	612999	549508	488464	430799	327919	243213	176288	125185
3.25	862890	836675	809120	780464	720780	659397	597894	537603	479598	373452	283238	209832	152215
3.50	887477	864440	839907	814076	759332	701807	643008	584282	526778	418943	324450	245354	181602
3.75	908007	887942	866201	843243	793542	740223	684664	628166	571893	463840	366322	282432	213065
4.00	925059	907719	888789	868383	823675	774740	722791	669035	614605	507661	408154	320637	246288
4.25	939153	924275	907839	889922	850038	805525	757411	706773	654676	550008	450090	359544	280934
4.50	960750	948068	923893	908273	872961	832797	788617	741349	691961	590554	491119	398742	316653
4.75	960254	949506	937158	923828	892778	856807	816557	772402	726389	629053	531087	437846	353092
5.00	968012	958892	948601	936952	909821	877823	841419	801225	757958	665324	569692	476504	389909
5.25	974323	966725	957950	947975	924407	896122	863416	826752	787116	699252	606691	514400	426775
5.50	979439	971096	961694	951196	936834	911975	882773	849548	812757	730775	641893	551260	463384
5.75	984574	978302	972085	964880	947376	925646	899723	869797	836704	759883	675159	586852	499456
6.00	986907	982542	977343	971261	956284	937385	914495	887694	857203	786603	706396	620986	534742
6.25	989586	985985	981655	976541	963782	947423	927314	903439	875918	810997	735554	653512	569023
6.50	991733	988773	985179	980897	970073	955975	938391	917228	892519	833154	762619	684319	602117
6.75	993450	991025	988053	984480	975332	963213	947926	929255	907180	853180	787608	713334	633870
7.00	994820	992839	990389	987418	979715	969373	956103	939704	920074	871197	810565	740514	664163
7.25	995910	994298	992284	989822	983358	974549	963091	948748	931369	887337	831557	765845	692908
7.50	996777	995467	993817	991782	986376	978900	969044	956549	941226	901734	850665	789340	720043
7.75	997464	996403	995055	993378	988870	982547	974098	963254	949798	914528	867983	811033	745534
8.00	998007	997150	996052	994674	990926	985595	978377	968999	957227	925853	883617	830973	769369
8.25	998437	997746	996853	995724	992617	988135	981989	973906	963645	935843	897675	849226	791558
8.50	998775	998220	997496	996573	994004	990247	985030	978086	969171	944625	910268	865869	812125
8.75	999042	998596	998010	997258	995139	991998	987582	981636	973917	952320	921510	880986	831114
9.00	999251	998894	998421	997809	996066	993447	989720	984643	977980	959041	931512	894666	848576
9.25	999416	999130	998749	998252	996821	994644	991506	987183	981449	964895	940381	907004	864576
9.50	999545	999317	999011	998608	997436	995629	993995	989324	984404	969977	948222	918093	879182
9.75	999646	999464	999218	998893	997935	996440	994233	991125	986914	974379	955132	928028	892472
10.00	999725	999580	999383	999121	998339	997105	995261	992635	989041	978180	961204	936901	904523
10.50	999834	999743	999618	999448	998931	998094	996815	994955	992356	984268	971177	951819	925234
11.00	999901	999844	999764	999655	999316	998752	997874	996567	994706	988743	978757	963516	941958
11.50	999941	999905	999855	999785	999564	999188	998589	997679	996358	993002	984462	972593	955311
12.00	999965	999943	999911	999867	999724	999474	999068	998440	997510	994357	988717	979567	965862
12.50	999979	999966	999946	999918	999826	999661	999388	998958	998307	996043	991863	984876	974117
13.00	999988	999980	999967	999950	999891	999773	999600	999307	998856	997243	994170	988882	980515
13.50	999993	999988	999980	999969	999932	999861	999740	999542	999231	998090	995849	991880	985433
14.00	999996	999993	999988	999981	999958	999912	999832	999699	999486	998684	997061	994107	989180
15.00	999999	999998	999996	999993	999984	999965	999921	999871	999774	999385	998552	996950	994140
16.00		999999	999999	999999	999994	999986	999972	999946	999902	999718	999302	998456	996899
17.00				999999	999998	999994	999989	999978	999959	999873	999670	999234	998394
18.00						999998	999995	999991	999983	999944	999847	999627	999184

表 1·4 $\rho = 0.4$

$\xi \backslash \eta$	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.05	79956	68145	58079	49499	42185	35952	30639	26111	22252	18963	16160	13771	11735
0.10	153518	131713	112999	96938	83155	71327	61179	52472	45001	38592	33094	28378	24333
0.15	271199	191005	164912	142364	122888	106062	91529	78974	68142	58785	50708	43736	37718
0.20	283469	246304	213966	185836	161372	140100	121610	105540	91576	79446	68911	59762	51820
0.25	340759	297873	260303	227402	198601	173398	151351	132071	115217	100487	87619	76380	66567
0.50	565402	507897	455800	408670	366093	327677	293058	261896	233876	208708	186122	165873	147735
0.75	713498	655667	601527	550997	503971	460319	419897	382549	348111	316418	287303	260600	236149
1.00	811125	759434	709458	661393	615385	571530	529886	490477	453301	418330	385523	354820	326152
1.25	875486	832171	788950	746165	704099	662990	623026	584363	547115	511371	477190	444610	413648
1.50	917915	883071	847212	810710	773894	737056	700450	664295	628779	594061	560270	527514	495876
1.75	945887	918636	889730	859499	828256	796286	763851	731189	698514	666015	633861	602199	571154
2.00	964126	943450	920637	896148	870238	843154	815130	786388	757135	727564	697852	668160	638635
2.25	976483	960740	943028	923526	902423	879908	856172	831400	805773	779466	752645	725468	698082
2.50	984496	972772	959197	943879	926938	908508	888726	867735	845680	822706	798957	774572	749688
2.75	989780	981135	970841	958943	945507	930611	914345	896809	878108	858354	837662	816147	793925
3.00	993262	986942	979203	970050	959500	947590	934368	919894	904238	887477	869695	850983	831431
3.25	995558	990965	985195	978209	969998	960563	949921	938099	925135	911076	895978	879905	862924
3.50	997072	993760	989479	984184	977841	970428	961937	952368	941736	930062	917377	903721	889139
3.75	998070	995691	992536	988547	983679	977896	971172	963490	954845	945237	934679	923189	910793
4.00	998728	997027	994712	991724	988010	983527	978239	972116	965140	957296	948581	938997	928554
4.25	999161	997951	996259	994031	991213	987757	983624	978776	973184	966827	959687	951756	943030
4.50	999447	998588	997357	995703	993575	990925	987712	983895	979442	974322	968514	961997	954759
4.75	999636	999028	998171	996912	995312	993289	990804	987816	984289	980191	975494	970174	964211
5.00	999760	999331	998626	997785	996586	995049	993136	990807	988029	984766	980991	976673	971792
5.25	999842	999540	999075	998413	997518	996355	994888	993082	990904	988320	985300	981816	977842
5.50	999896	999684	999350	998865	998199	997322	996202	994807	993107	991069	988666	985869	982651
5.75	999931	999783	999543	999189	998696	998036	997184	996111	994789	993190	991346	989051	986458
6.00	999955	999851	999679	999422	999057	998562	997916	997093	996070	994820	993318	991540	989460
6.25	999970	999898	999775	999588	999319	998949	998461	997832	997043	996069	994889	993480	991819
6.50	999980	999930	999842	999707	999509	999234	998866	998387	997780	997024	996100	994988	993667
6.75	999987	999952	999889	999792	999646	999442	999165	998802	998336	997751	997031	996156	995110
7.00	999992	999967	999922	999852	999746	999594	999387	999111	998756	998305	997744	997059	996233
7.25	999994	999978	999946	999895	999817	999705	999550	999342	999071	998724	998290	997755	997105
7.50	999996	999985	999962	999926	999869	999786	999671	999514	999308	999042	998706	998290	997779
7.75	999998	999990	999973	999947	999906	999845	999759	999641	999485	999282	999023	998700	998301
8.00	999999	999993	999981	999963	999933	999888	999824	999736	999618	999462	999264	999013	998702
8.25	999995	999987	999974	999952	999919	999872	999806	999717	999598	999446	999252	999011	998711
8.50	999997	999991	999981	999966	999941	999907	999857	999790	999703	999584	999435	999247	998995
8.75	999998	999992	999982	999967	999937	999897	999845	999777	999688	999568	999429	999259	999033
9.00	999999	999995	999991	999982	999969	999951	999923	999886	999834	999766	999678	999567	999429
9.25	999997	999993	999988	999978	999964	999944	999916	999876	999825	999758	999672	999567	999433
9.50	999998	999995	999991	999984	999974	999959	999938	999908	999869	999818	999752	999681	999605
9.75	999999	999997	999994	999988	999981	999970	999955	999932	999903	999864	999813	999752	999691
10.00	999999	999999	999998	999995	999992	999987	999978	999967	999950	999928	999898	999859	999810
10.50	999999	999999	999999	999998	999995	999991	999988	999983	999972	999960	999943	999920	999897
11.00	999999	999999	999999	999999	999998	999997	999994	999991	999985	999978	999969	999955	999935
11.50	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999
12.00	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999
12.50	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999
13.00	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999
13.50	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999
14.00	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999

η	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.05	8521	6181	4492	3261	1719	906	477	251	132	37	10	3	1
0.10	17887	13146	9660	7097	3829	2064	1112	599	332	93	27	8	2
0.15	28045	20844	15486	11501	6337	3487	1916	1052	577	173	52	15	5
0.20	38942	29446	21951	16466	9250	5185	2901	1630	903	279	86	26	8
0.25	50526	38316	29032	21980	12570	7169	4077	2314	1310	417	132	41	13
0.50	116983	92426	72872	57343	35317	21610	13146	7956	4791	1716	636	211	73
0.75	193379	157812	128379	104129	67959	43940	28158	17913	11318	4438	1705	643	239
1.00	274601	210185	192175	159845	109470	74074	49594	32893	21633	9151	3774	1523	603
1.25	356565	305790	261015	221840	158345	113456	77490	53289	36159	16400	7196	3080	1290
1.50	436195	381541	332007	287520	212838	155106	111499	79180	55618	26663	12368	5578	2156
1.75	511331	455051	402735	354610	271098	203808	150967	110358	79719	40317	19670	9307	4290
2.00	580590	524590	471288	421149	331407	256230	195035	146371	108473	57614	29434	14562	7001
2.25	643215	589009	536254	485573	392176	311022	242671	186582	141564	78671	41974	21629	10815
2.50	698931	637644	596666	546706	452039	366902	292850	230228	178520	103466	57464	30770	15962
2.75	747815	700214	651940	603724	509918	422712	344515	276470	218748	131848	76034	42210	22670
3.00	790190	746734	701807	656113	564928	477446	396679	324450	261577	163550	97709	56122	31147
3.25	826533	787426	746243	703620	616462	530278	448451	373329	306300	198208	122428	72623	41578
3.50	857409	822659	785407	746230	664118	580559	499056	422321	352202	235384	150039	91762	54115
3.75	883419	852884	819585	783969	707679	627809	547852	470717	398595	274589	180417	113528	68866
4.00	905161	878599	849150	817153	747083	671708	594329	517902	441897	315305	212973	137842	85897
4.25	923208	900313	871517	840960	782389	712073	638106	563364	490353	357007	247664	164566	105224
4.50	938094	918522	896122	871045	813750	748839	678923	606691	534642	399181	284015	193508	126813
4.75	950300	931634	914398	893484	841384	782077	716626	647575	577284	441339	321626	224229	150585
5.00	960254	946263	929762	910759	865557	811774	751153	685800	617944	483030	360090	257054	176413
5.25	968331	956618	942603	926242	886557	838214	782519	721237	656365	523854	399006	291082	204132
5.50	974874	963106	953278	939283	904686	861560	810805	753829	692369	563460	437985	326194	233543
5.75	980099	972031	962106	950209	920244	882043	836136	783585	725844	601555	476666	362062	264418
6.00	984299	977656	969473	959417	933552	899905	858674	810565	756743	637903	514715	398361	296508
6.25	987649	982206	975329	966874	944795	915394	878605	834870	785068	672324	551839	434776	329551
6.50	990312	985872	980189	973117	954319	928753	896131	856631	810867	704689	587782	471004	363276
6.75	992421	988815	984140	978252	962328	940219	911459	876004	834222	734917	622329	506768	397414
7.00	994087	991169	987140	982459	969035	950011	924796	893157	855245	762972	655307	541814	431701
7.25	995397	993046	989922	985894	974626	958339	936346	908266	874064	788954	686584	575918	465882
7.50	996426	994538	991999	988687	979271	965389	946301	921510	890825	812595	716065	608887	499719
7.75	997231	995720	993664	990952	983114	971334	954844	933066	905680	834256	743690	640558	532992
8.00	997859	996654	994994	992782	986282	976328	962146	943104	918783	853917	769412	670802	565503
8.25	998338	997190	996055	994256	988886	980508	968362	951787	930290	871676	793293	699517	597077
8.50	998728	997969	996898	995439	991019	983993	973633	959267	940152	887641	815297	726634	627565
8.75	999023	998422	997566	996387	992761	986890	978088	965687	949115	901930	835491	752108	656839
9.00	999250	998777	998094	997145	994178	989291	981839	971177	956718	914664	853918	775918	684802
9.25	999426	999054	998511	997748	995329	991273	984987	975854	963288	925965	870713	798069	711375
9.50	999561	999269	998839	998228	996261	992906	987620	979825	968946	935955	885904	818581	736505
9.75	999665	999437	999096	998608	997013	994246	989817	983187	973802	944753	899603	837492	760159
10.00	999745	999566	999298	998909	997620	995343	991644	986023	977956	952472	911907	854853	782323
10.25	999853	999745	999578	999333	998497	996970	994411	990410	984508	965103	932734	885182	822213
11.00	999915	999850	999749	999596	999058	998045	996295	993479	989215	974635	949176	910152	856377
11.50	999951	999913	999851	999756	999414	998748	997563	995604	992559	979982	961982	930415	885191
12.00	999972	999949	999912	999854	999638	999201	998410	997061	994910	986972	971832	946640	909147
12.50	999984	999971	999949	999913	999777	999497	998970	998050	996546	990786	979420	959467	928799
13.00	999991	999983	999970	999949	999864	999685	999338	998716	997674	994536	984948	969488	944718
13.50	999995	999990	999983	999970	999917	999803	999577	999160	998445	995501	989136	977230	957459
14.00	999997	999995	999990	999983	999950	999878	999732	999455	998968	996892	992220	983148	967545
15.00	999999	999998	999997	999994	999982	999954	999894	999774	999554	998548	996100	990985	981566
16.00		999999	999999	999998	999993	999983	999959	999909	999812	999319	998099	995317	989845
17.00					999998	999994	999985	999964	999923	999706	999097	997633	994563
18.00					999999	999998	999995	999986	999969	999872	999581	998833	997164

表 1.5 $\rho = 0.5$

$\xi \backslash \eta$	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.05	95163	75027	59150	46630	36758	28975	22839	18001	14188	11182	8812	6944	5472
0.10	181269	144612	115347	91988	73346	58473	46607	37143	29596	23579	18783	14959	11913
0.15	259182	209131	168680	136002	109614	88316	71131	57272	46098	37092	29837	23994	19289
0.20	329682	268934	219238	178615	145433	118347	96253	78242	63569	51622	41901	33994	27568
0.25	393469	324351	267120	219789	180690	148425	121825	99919	81892	67072	54898	44905	36709
0.50	632120	545737	469869	403529	345746	295594	252207	214781	182585	154956	131302	111093	93863
0.75	776869	695906	620644	551314	487946	430417	378500	331894	290255	253210	220382	191392	166876
1.00	864665	797218	730988	666920	605703	547816	493562	443106	396499	353707	314629	279117	246989
1.25	917915	865245	810710	755461	700450	646447	594061	543757	495876	450652	408230	368678	332007
1.50	950213	910730	867698	822151	775015	727109	679138	631700	585289	540306	497063	455796	416671
1.75	969802	941030	908073	871703	832671	791695	749411	706479	663375	620584	578506	537477	497769
2.00	981684	961147	936459	908108	876618	842530	806382	768694	729960	690639	651147	611856	573093
2.25	988891	974462	956284	934597	909708	881973	851780	819533	785638	750496	714491	677985	641313
2.50	993262	983251	970049	953712	934368	912209	887477	860450	831431	800738	768692	735611	701807
2.75	995913	989037	979558	967406	952581	935144	915215	892955	868565	842272	814322	784974	754490
3.00	997521	992838	986096	977154	965927	952384	936548	918487	898309	876157	852202	826633	799657
3.25	998496	995329	990573	984054	975619	965238	952806	938141	921876	903482	883259	861333	837852
3.50	999088	996959	993627	988912	982661	974753	965098	953644	940371	925290	908445	889903	869759
3.75	999447	998028	995703	992318	987712	981750	974322	965345	954759	942534	928669	913182	896122
4.00	999665	998717	997110	994695	991325	986866	981200	974227	965865	956056	944764	931973	917692
4.25	999796	999168	998061	996347	993897	990586	986297	980925	974378	966579	957471	947012	935181
4.50	999877	999461	998702	997492	995721	993278	990054	985946	980860	974711	967429	958955	949247
4.75	999925	999652	999133	998282	997010	995217	992809	989689	985766	980955	975179	968371	960474
5.00	999955	999775	999422	998827	997916	996608	994820	992465	989460	985721	981174	975745	969373
5.25	999972	999855	999615	999200	998552	997602	996281	994514	992226	989340	985784	981486	976382
5.50	999983	999907	999744	999456	998996	998310	997319	996020	994287	992073	989309	985929	981869
5.75	999990	999940	999810	999631	999306	998812	998101	997122	995817	994127	991992	989350	986141
6.00	999994	999962	999888	999750	999521	999167	998649	997925	996948	995665	994024	991971	989449
6.25	999996	999975	999926	999831	999671	999418	999042	998509	997779	996810	995556	993969	991909
6.50	999998	999985	999951	999885	999774	999594	999322	998931	998390	997661	996707	995486	993954
6.75	999998	999990	999968	999923	999845	999717	999521	999236	998816	998290	997567	996632	995448
7.00	999999	999994	999979	999948	999894	999803	999663	999455	999160	998753	998208	997496	996584
7.25		999996	999986	999965	999928	999864	999763	999613	999396	999093	998684	998143	997445
7.50		999998	999991	999976	999951	999906	999834	999725	999567	999343	999036	998628	998094
7.75		999998	999994	999984	999966	999935	999884	999805	999690	999525	999296	998988	998583
8.00		999999	999996	999989	999977	999955	999919	999862	999779	999657	999487	999256	998949
8.25			999997	999992	999985	999969	999943	999903	999843	999753	999627	999455	999223
8.50			999998	999995	999990	999979	999961	999932	999888	999823	999730	999601	999427
8.75			999999	999996	999993	999985	999973	999952	999921	999873	999805	999709	999578
9.00				999997	999995	999990	999981	999966	999944	999909	999859	999788	999691
9.25				999998	999997	999993	999987	999976	999961	999935	999898	999846	999774
9.50				999998	999998	999995	999991	999983	999972	999954	999927	999888	999835
9.75				999999	999999	999997	999994	999988	999981	999967	999948	999919	999879
10.00					999998	999996	999992	999987	999977	999962	999941	999912	
10.50						999999	999998	999996	999994	999988	999981	999970	999954
11.00							999999	999998	999997	999994	999990	999984	999976
11.50								999999	999997	999995	999992	999988	
12.00									999998	999998	999996	999994	
12.50										999999	999999	999998	999997
13.00											999999	999999	999999

η	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.05	3398	2109	1309	812	313	120	46	18	7	1			
0.10	7551	4784	3029	1917	767	306	122	49	19	3			
0.15	12457	8036	5179	3334	1378	568	233	96	39	6	1		
0.20	18107	11873	7774	5083	2164	917	387	163	68	12	2		
0.25	24489	16302	10829	7181	3141	1365	590	254	109	20	4	1	
0.50	66743	47230	31275	23350	11374	5471	2603	1226	573	122	25	5	1
0.75	123888	91890	67732	49642	26266	13654	6991	3532	1764	427	100	23	5
1.00	192050	148064	113279	86066	48769	27046	14723	7887	4164	1120	289	72	17
1.25	267112	212828	168099	131719	79180	46438	26663	15028	8333	2456	690	187	49
1.50	345231	283050	229867	185061	117192	72224	43479	25644	14853	4755	1444	419	117
1.75	423131	355741	296089	244177	161992	104383	65584	40303	24286	8381	2731	848	253
2.00	498229	428284	364357	307018	212410	142522	93106	59409	37123	13728	4774	1577	498
2.25	568652	498549	432520	371590	267055	185934	125896	83167	53745	21193	7830	2739	914
2.50	633182	564928	498783	436084	324450	233688	163550	111574	74392	31147	12179	4496	1580
2.75	691154	626113	561748	498961	383142	284710	205457	144422	99149	43913	18113	7036	2596
3.00	742353	682040	620409	558993	441787	337869	250851	181329	127941	59745	25920	10566	4083
3.25	786894	731819	674124	615265	499208	392046	298871	221761	160544	78809	35868	15307	6180
3.50	825131	775650	722560	667164	554430	446192	348613	265074	196599	101176	48190	21484	9046
3.75	857566	813750	765641	714337	606691	493731	399181	310558	235638	126813	63074	29317	12850
4.00	884785	846487	803488	756657	655438	550784	449728	357467	277112	155591	80647	39012	17771
4.25	907404	874321	836365	794173	700314	559785	499485	405065	320417	187284	100973	50749	23990
4.50	926034	897760	864632	827071	741134	645884	547783	452647	364929	221590	124046	64675	31680
4.75	941253	917324	888710	855635	777859	688736	594069	499568	410025	258138	149789	80895	41007
5.00	953591	933522	909041	880206	810565	728135	637903	545258	455110	296508	178060	99469	52116
5.25	963525	946832	926071	901166	839421	763990	678965	589235	499631	336250	208653	120406	65128
5.50	971470	957693	940229	918902	864658	796314	717040	631106	543095	376897	241312	143664	80132
5.75	977786	966496	951918	933802	886551	825197	752012	670573	585078	417985	275735	169152	97187
6.00	982779	973589	961506	946231	905399	850793	783850	707424	625226	459066	311588	196729	116311
6.25	986704	979271	969322	956533	921510	873300	812595	741529	663263	499719	348518	226211	137485
6.50	989775	983798	975658	965020	935189	892949	838145	772831	698985	539561	386189	257379	160651
6.75	992166	987387	980765	971972	946731	909984	861243	801335	732254	578254	424148	289983	185711
7.00	994020	990218	984861	977635	956410	924657	881463	827101	762998	615508	462132	323747	212535
7.25	995450	992441	988130	982224	964481	937219	899201	850228	791198	651087	499777	358385	240959
7.50	996550	994179	990728	985926	971177	947910	914664	870848	816884	684822	536774	393601	270792
7.75	997392	995532	992782	988898	976701	956959	928064	889118	840123	716518	572847	429101	301823
8.00	998035	996582	994400	991273	981238	964577	939611	905207	861015	746144	607753	465598	333820
8.25	998523	997393	995669	993163	984946	970959	949507	919296	879684	773636	641285	499817	366545
8.50	998893	998018	996662	994661	987964	976280	957945	931564	896269	798984	673278	534504	399752
8.75	999173	998497	997434	995844	990409	980694	965104	942193	910922	822213	703600	568426	433196
9.00	999384	998863	998034	996775	992383	984342	971149	951354	923799	843378	732158	601376	466638
9.25	999542	999143	998497	997504	993970	987344	976231	959212	935059	862553	758893	633175	499847
9.50	999660	999355	998855	998075	995240	989803	980484	965921	944856	879833	783775	663673	532608
9.75	999749	999516	999129	998518	996254	991810	984029	971625	953340	895326	806804	692749	564723
10.00	999815	999638	999340	998863	997061	993442	986972	976452	960655	909147	828005	720310	596012
10.50	999900	999798	999623	999335	998205	995832	991411	983939	972301	932263	865115	770653	655507
11.00	999946	999889	999787	999615	998915	997380	994404	989179	980746	950165	895648	814472	710106
11.50	999972	999939	999880	999779	999351	998371	996394	992793	986777	963798	920316	851877	759184
12.00	999985	999967	999933	999874	999615	998997	997700	995253	991021	974017	939908	883229	802452
12.50	999993	999982	999963	999929	999774	999388	998548	996905	993969	981566	955223	909061	839911
13.00	999996	999990	999980	999960	999868	999630	999092	998002	995991	987064	967016	930007	871793
13.50	999998	999995	999989	999978	999924	999778	999437	998723	997361	991018	975969	946735	898494
14.00	999999	999997	999994	999988	999956	999868	999654	999190	998280	993825	982675	959904	920520
15.00		999999	999998	999996	999986	999954	999872	999683	999288	997164	991262	977975	952794
16.00			999999	999999	999996	999985	999954	999879	999715	998743	995755	988364	973062
17.00				999999	999999	999995	999984	999955	999889	999461	998008	994071	985192
18.00						999998	999995	999984	999958	999775	999095	997079	992140

表 1.6 $\rho = 0.6$

η	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.05	117503	82626	58092	40836	28701	20169	14171	9955	6993	4911	3449	2421	1700
0.10	221199	158963	114167	81946	58785	42147	30203	21632	15486	11081	7925	5666	4049
0.15	312711	229417	168096	123017	89925	65664	47900	34907	25416	18489	13438	9760	7083
0.20	393469	294382	219790	163781	121826	90465	67072	49655	36709	27103	19985	14720	10829
0.25	464739	354230	269194	204012	154225	116316	87537	65746	49287	36883	27556	20555	15310
0.50	713496	588560	481732	391607	316418	254282	203352	161901	128379	101419	79847	62664	49034
0.75	846645	740737	640764	548854	466083	392771	328727	273428	226156	186058	152415	124286	100941
1.00	717915	838134	755461	673281	594061	519497	450652	388093	332008	282305	238704	200796	168099
1.25	956063	899734	835977	767874	698050	628640	561306	497272	437383	382160	331863	286544	246102
1.50	976481	938313	891330	837680	779466	718636	656904	595720	536254	479409	425842	375991	330109
1.75	987412	962273	928755	888011	841412	790415	736463	680909	624968	569687	515933	464396	415594
2.00	993262	977047	953713	923626	887477	846170	800738	752261	701807	650380	598890	548135	498783
2.25	996393	986101	970165	948439	921092	888547	851418	810452	766468	720313	672815	624756	576848
2.50	998069	991619	980905	965501	945237	920174	890573	856861	819586	779377	736909	692864	647913
2.75	998967	994965	987855	977100	962344	943411	920302	893175	862331	828176	791197	751934	710954
3.00	999447	996986	992319	984908	974322	960255	942535	921126	896122	867732	836259	802083	765641
3.25	999704	998201	995167	990118	982622	972315	958943	942328	922420	899264	873006	843872	812160
3.50	999842	998930	996973	993567	988319	980869	970910	958207	942603	924031	902505	878121	851049
3.75	999915	999365	998112	995835	992198	986871	979547	969961	957904	943228	925855	905778	883059
4.00	999955	999624	998827	997317	994819	991048	985722	978574	969373	957930	944105	927083	909041
4.25	999976	999778	999274	998279	996578	993933	990097	984824	977883	969068	958206	945166	929863
4.50	999987	999869	999552	998901	997751	995911	993174	989321	984400	977424	968988	958673	946358
4.75	999993	999923	999725	999301	998529	997259	995321	992532	988700	983635	977152	969084	959287
5.00	999996	999955	999831	999557	999042	998171	996810	994807	992813	989823	985879	980933	975022
5.25	999998	999974	999897	999720	999378	998785	997836	996409	994366	991562	987841	983050	977041
5.50	999999	999985	999937	999824	999598	999196	998539	997529	996055	993993	991211	987568	982927
5.75		999991	999962	999889	999741	999471	999018	998307	997251	995747	993682	990935	987382
6.00		999995	999977	999930	999834	999652	999343	998846	998094	997004	995483	993427	990728
6.25		999997	999986	999956	999893	999773	999562	999217	998684	997900	996787	995259	993224
6.50		999998	999992	999973	999932	999852	999709	999470	999096	998535	997725	996598	995073
6.75		999999	999995	999983	999956	999903	999807	999643	999381	998982	998397	997570	996416
7.00			999997	999989	999972	999937	999873	999761	999578	999296	998875	998272	997414
7.25			999998	999993	999982	999959	999916	999840	999713	999515	999214	998777	998161
7.50			999999	999996	999989	999974	999945	999893	999806	999667	999453	999138	998688
7.75				999997	999993	999983	999964	999929	999869	999772	999621	999394	999067
8.00				999998	999995	999989	999977	999953	999912	999845	999738	999576	999340
8.25				999999	999997	999993	999985	999969	999941	999895	999820	999705	999534
8.50					999998	999995	999990	999979	999961	999929	999876	999795	999673
8.75					999999	999997	999994	999986	999974	999952	999915	999858	999771
9.00						999998	999996	999991	999983	999968	999942	999902	999840
9.25						999999	999997	999994	999989	999978	999961	999933	999889
9.50							999998	999996	999993	999986	999974	999954	999923
9.75							999999	999998	999995	999990	999982	999969	999947
10.00								999998	999997	999994	999988	999979	999963
10.50								999999	999999	999997	999995	999990	999983
11.00									999998	999998	999996	999992	999986
11.50										999999	999999	999997	999993
12.00											999999	999999	999998

η	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.05	837	412	203	100	24	6	1						
0.10	2065	1052	535	272	70	18	5	1					
0.15	3722	1951	1020	532	144	39	10	3	1				
0.20	5843	3141	1682	898	254	71	20	5	1				
0.25	8460	4651	2546	1388	408	118	34	10	3				
0.50	29781	17913	10682	6321	2170	727	239	77	25	2			
0.75	65853	42402	26987	17000	6566	2459	897	320	112	13			
1.00	116277	79180	53177	35275	15028	6171	2456	952	360	49	6	1	
1.25	178904	127796	89878	62337	28910	12860	5522	2300	933	144	21	3	
1.50	250525	186582	136642	98566	49283	23539	10815	4805	2074	359	57	8	1
1.75	327513	253078	192130	143541	76788	39113	19107	9003	4111	790	139	23	3
2.00	406335	324450	254385	196160	111574	60269	31147	15491	7449	1580	305	54	9
2.25	483900	397857	321126	254826	153287	87395	47575	24876	12553	2919	613	118	21
2.50	557745	470716	390012	317659	201142	120544	68866	37728	19917	5046	1148	239	46
2.75	626098	540876	458854	382694	254014	159430	95275	54526	30031	8248	2026	454	94
3.00	687844	606691	525760	448050	310558	203465	126813	75615	43343	12450	3393	813	180
3.25	742446	667029	589213	512054	369330	251812	163251	101173	60219	19197	5430	1390	327
3.50	789826	721236	648106	573315	428900	303463	204132	131197	80927	27640	8348	2274	568
3.75	830252	769059	701719	630764	487932	357311	248813	165499	105597	38514	12385	3583	947
4.00	864223	810565	749683	683655	545258	412231	296508	203717	134220	52116	17798	7453	1523
4.25	892379	846059	791923	731545	599913	467136	346345	235343	166642	68689	24550	8047	2369
4.50	915424	876004	828588	774251	651155	521040	397414	289749	202571	88401	33801	11545	3578
4.75	934067	900955	859997	811805	698465	573084	448820	336231	241597	111337	44895	16143	5257
5.00	948991	921510	886578	844406	741529	622568	499719	384040	283208	137485	58347	22046	7532
5.25	960820	938264	908821	872374	780218	668954	549354	432426	326826	166743	74329	29463	10544
5.50	970110	951786	927240	896101	814555	711864	597077	480663	371825	898912	92961	38594	14446
5.75	977344	962601	942344	916025	844687	751075	642360	528083	417568	233713	114304	49626	19403
6.00	982932	971176	954618	932594	870848	786495	684802	574093	463427	270792	138354	62721	25581
6.25	987217	977921	965506	946250	893338	818148	724123	618189	508811	409741	165038	78011	33149
6.50	990480	983186	972409	957408	912491	846148	760158	659966	553178	450107	194220	95588	42268
6.75	992947	987267	978677	966454	928658	870682	792847	699117	596058	491419	225700	115502	53085
7.00	994801	990409	983613	973731	942193	891985	822213	735431	637050	433196	259223	173753	65729
7.25	996186	992813	987473	979543	953434	910326	848354	768787	675839	474970	294488	162293	80307
7.50	997215	994640	990473	984154	963701	925988	871424	799145	712186	516296	331159	189023	96893
7.75	997976	996022	992790	987789	901286	939260	891614	826533	745930	566765	368874	217797	115529
8.00	998535	997060	994570	990636	976453	950425	909147	851036	776983	596012	407258	248426	136221
8.25	998944	997837	995929	992854	981434	959751	924258	872784	805321	633725	445935	280684	158935
8.50	999242	998416	996961	994571	985433	967490	937189	891940	830974	669647	484537	314311	183603
8.75	999457	998844	997371	995893	988624	973871	948179	908691	854019	703574	522716	349025	210114
9.00	999613	999159	998328	996907	991157	979101	957459	923238	874570	735360	560147	384530	238325
9.25	999725	999391	998767	997680	993156	983361	965246	935787	892768	764912	596540	420517	268062
9.50	999806	999561	999094	998267	994726	986812	971740	946543	908775	792184	631640	456684	299122
9.75	999863	999684	999337	998710	995952	989594	977125	955705	922762	817171	665235	492731	331282
10.00	999903	999774	999516	999044	996906	991823	981566	963465	934909	839911	697150	528375	364301
10.50	999953	999885	999745	999480	998213	995012	988180	975470	954393	878935	755457	597424	431908
11.00	999977	999942	999868	999721	998983	997004	992544	983806	968593	910057	805970	662037	499916
11.50	999989	999971	999932	999852	999429	998227	995368	989479	978726	934306	848466	720892	566404
12.00	999995	999986	999965	999923	999683	998965	997164	993267	985813	952794	883862	773172	629692
12.50	999998	999993	999983	999960	999826	999404	998288	995754	990680	966604	912290	818530	688447
13.00	999999	999996	999991	999980	999906	999661	998979	997358	993963	976726	934767	857019	741724
13.50		999998	999996	999990	999950	999809	999399	998378	996143	984011	952196	889004	788977
14.00		999999	999998	999995	999973	999894	999650	999016	997568	989166	965463	915067	830018
15.00				999999	999992	999968	999885	999651	999067	995216	982692	952288	894171
16.00					999998	999991	999964	999882	999658	997988	991757	974564	937494
17.00					999999	999997	999989	999961	999880	999191	996256	987087	964877
18.00						999999	999997	999988	999960	999688	998373	993738	981168

表 1.7 $\rho = 0.7$

$\xi \backslash \eta$	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.05	153518	89783	52472	30646	17887	10434	6083	3544	2064	1201	699	406	236
0.10	283469	173177	105540	64175	38942	23584	14258	8605	5185	3120	1875	1125	674
0.15	393469	250332	158497	99919	62745	39262	24489	15229	9445	5843	3606	2221	1365
0.20	486583	321464	210769	137277	88889	57258	36711	23438	14906	9447	5968	3759	2361
0.25	565402	386837	261896	175720	116983	77349	50832	33225	21610	13993	9024	5798	3712
0.50	811124	638125	490478	369913	274602	201118	145589	104319	74074	52172	36479	25337	17492
0.75	917915	792322	664295	543757	436195	343913	267112	204741	155106	116277	86347	63572	46438
1.00	964326	883355	786388	682994	580590	484333	397364	321215	256230	201955	157453	121543	92973
1.25	984496	935603	867735	786835	698931	609340	522296	440839	366903	301479	244829	196689	156448
1.50	993262	964947	919894	860450	790190	713137	633182	553717	477446	406335	341648	284041	233683
1.75	997072	981145	952368	910668	857410	794925	726038	653674	580559	509030	440942	377638	319982
2.00	998727	989961	972117	943897	905161	856766	800318	737882	671708	604005	536777	471715	410147
2.25	999447	994701	981896	965345	938095	901980	857566	806002	748839	687844	624824	561494	499371
2.50	999759	997225	990808	978901	960255	934124	900337	859273	811774	759034	702460	643543	583753
2.75	999895	998556	994808	987319	974854	956436	931459	899750	861560	817522	768565	715824	660541
3.00	999954	999254	997094	992465	984299	971606	953591	929749	899905	864223	823179	777508	728135
3.25	999980	999616	998387	995569	990313	981735	969019	951504	928754	900593	867124	828708	785928
3.50	999991	999804	999112	997418	994087	988391	979584	966979	950012	928299	901667	870172	834085
3.75	999996	999900	999515	998509	996426	992702	986704	977797	965389	948991	928258	903022	873300
4.00	999998	999949	999736	999146	997859	995458	991436	985245	976328	964173	948347	928538	904580
4.25	999999	999974	999858	999514	998728	997199	994539	990299	983993	975134	963267	948006	929067
4.50		999987	999924	999725	999250	998288	996550	993686	989291	982932	974176	962618	947910
4.75		999993	999960	999847	999561	998962	997840	995929	992905	988406	982041	973422	962184
5.00		999997	999979	999914	999745	999375	998658	997398	995343	992200	987637	981301	972842
5.25		999998	999989	999952	999853	999627	999173	998351	996970	994801	991570	986974	980695
5.50		999999	999995	999974	999915	999779	999494	998962	998044	996564	994303	991010	986408
5.75			999998	999986	999951	999870	999693	999352	998748	997748	996183	993850	990518
6.00			999999	999992	999972	999924	999815	999598	999204	998535	997463	995828	993442
6.25				999996	999984	999956	999884	999753	999497	999054	998326	997192	995502
6.50				999998	999991	999974	999914	999849	999685	999393	998904	998125	996938
6.75				999999	999995	999985	999961	999908	999803	999613	999287	998756	997932
7.00					999997	999919	999977	999945	999878	999755	999539	999181	998613
7.25					999998	999996	999987	999967	999925	999846	999704	999464	999076
7.50					999999	999998	999992	999980	999954	999903	999811	999652	999388
7.75						999999	999996	999989	999972	999940	999880	999775	999597
8.00						999998	999994	999983	999963	999924	999855	999737	999599
8.25							999999	999997	999990	999977	999952	999907	999829
8.50								999998	999994	999986	999970	999941	999889
8.75								999999	999996	999992	999982	999963	999929
9.00									999998	999995	999989	999977	999954
9.25									999999	999997	999993	999985	999971
9.50									999998	999996	999991	999982	999968
9.75									999999	999997	999995	999988	999973
10.00										999998	999997	999993	999979
10.50											999999	999999	999997
11.00												999999	999999

$\xi \setminus \eta$	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.05	80	27	9	3									
0.10	241	86	31	11									
0.15	513	191	71	26									
0.20	924	359	138	53									
0.25	1508	606	241	95	14	2							
0.50	8203	3774	1708	762	146	27							
0.75	24263	12368	6171	3022	690	149	31	6	1				
1.00	53082	29444	15928	8428	2229	553	130	29	6				
1.25	96344	57464	33330	18860	5666	1585	418	105	25	1			
1.50	153712	97709	60269	36194	12179	3789	1104	305	80	5			
1.75	223047	150039	97783	61949	23093	7916	2529	761	217	16	1		
2.00	300969	212973	145861	97000	39701	14873	5171	1687	521	43	3		
2.25	383523	284015	203465	141428	63074	25651	9647	3393	1126	107	9	1	
2.50	466788	360090	268716	194499	91891	41211	16678	6293	2234	241	22	2	
2.75	547333	417985	339188	254783	132336	62370	27036	10900	4124	502	51	4	
3.00	622488	514715	412231	320346	178060	89690	41473	17798	7153	977	111	11	1
3.25	690433	587782	485261	388989	230214	123405	60643	27610	11751	1790	225	24	2
3.50	750170	655308	555989	458479	287544	163380	85031	40945	18403	3112	431	51	5
3.75	801395	716065	622568	526746	348518	209113	114890	58347	27621	5160	786	101	11
4.00	844347	769433	681657	592022	411468	259778	150213	80241	39917	8205	1368	192	23
4.25	879616	815298	738424	652928	474734	314296	190715	106887	55749	12559	2284	348	46
4.50	908096	853938	786496	708501	536774	371420	235853	138354	75497	18571	3674	606	86
4.75	930663	885904	827880	758180	596261	429837	284863	174497	99420	26611	5710	1017	155
5.00	948277	911907	862876	801761	652128	488249	336813	214966	127630	37052	8597	1651	270
5.25	961828	932734	891985	839330	703600	545458	390671	259223	160078	50243	12575	2598	456
5.50	972113	949175	915830	871197	750186	600419	445366	306573	196548	66492	17905	3969	745
5.75	979823	961982	935084	897822	791657	652282	499855	356209	236666	86041	24868	5904	1183
6.00	985534	971832	950425	919755	828005	700406	553171	407258	279915	109046	33749	8563	1830
6.25	989718	979319	962496	937586	859404	744364	604467	458828	325669	135563	44826	12132	2760
6.50	992753	984948	971882	951902	886160	781927	653046	510057	373222	165539	58354	16815	4065
6.75	994932	989136	979101	963262	908667	819041	698369	560147	421824	198808	74550	22833	5857
7.00	996483	992220	984594	972178	927371	849800	740063	608395	470721	235100	93581	30410	8265
7.25	997576	994471	988733	979102	942737	876409	777910	654216	519185	274044	115551	39772	11437
7.50	998342	996100	991823	984426	955223	899158	811834	697150	566543	315190	140490	51134	15535
7.75	998873	997267	994108	988481	965265	918391	841878	736870	612202	358024	168351	64649	20735
8.00	999238	998098	995784	991543	973261	934477	858182	771173	655663	401994	199007	80598	27220
8.25	999488	998685	997004	993834	979569	947796	890964	805970	696528	446529	232253	98986	35176
8.50	999658	999097	997885	995535	984501	958716	910489	835276	734508	491063	267813	119924	44785
8.75	999773	999383	998516	996787	988323	967587	927059	861185	769415	535055	305348	143432	56217
9.00	999850	999581	998965	997703	991262	974730	940987	883862	801157	578005	344471	169470	69624
9.25	999902	999717	999282	998368	993503	980432	952587	903519	829728	619472	384756	197940	85132
9.50	999936	999810	999505	998847	995200	984947	962166	920399	855194	659078	425758	228684	102835
9.75	999958	999873	999661	999190	996475	988494	970008	934767	877679	696517	467028	261487	122790
10.00	999973	999916	999768	999434	997427	991259	976377	946891	897352	731558	508121	296089	145009
10.50	999989	999963	999894	999728	998652	995046	985616	965463	929095	791881	588134	369444	196066
11.00	999995	999984	999952	999872	999309	997255	991446	978082	952220	845566	662885	446007	255201
11.50	999998	999994	999979	999941	999653	998511	995027	986409	968557	887009	730224	522868	320920
12.00	999999	999998	999991	999973	999929	999709	997169	991757	979770	919209	788855	597271	391192
12.50		999999	999996	999988	999917	999587	998421	995104	987263	943500	838302	666880	463661
13.00			999998	999995	999960	999789	999136	997150	992145	961323	878772	729948	535899
13.50			999999	999998	999981	999894	999536	998372	995250	974063	910973	785391	605635
14.00				999999	999991	999947	999756	999087	997182	982947	935919	832759	670950
15.00					999998	999987	999935	999727	999060	993033	968661	904083	783052
16.00						999997	999984	999923	999706	997347	985751	948872	866792
17.00							999999	999997	999979	999914	999054	993947	974572
18.00								999995	999976	999682	997588	988154	959016

表 1·8 $\rho = 0.8$

$\xi \backslash \eta$	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.05	221199	91529	37718	15486	6337	2585	1052	427	173	70	28	11	5
0.10	393469	180690	81892	36709	16302	7181	3141	1365	590	254	109	46	20
0.15	527633	265795	130711	63064	29954	14043	6510	2989	1361	615	276	123	55
0.20	632120	345746	182585	93863	47230	23350	11374	5471	2603	1226	573	265	122
0.25	713495	419897	236149	128379	67959	35206	17913	8975	4438	2169	1049	503	239
0.50	917915	700450	495876	332008	212828	131720	79140	46438	36663	15028	8333	4554	2456
0.75	976482	856172	698081	536254	392176	275261	186583	122743	78671	49282	30252	18236	10815
1.00	993262	934368	831431	701807	564928	436084	324451	233687	163550	111573	74392	48588	31147
1.25	998070	971172	910793	819585	707679	587644	470717	364898	274588	201142	143785	100524	68866
1.50	999447	987712	954759	896122	813749	714338	606691	499371	399181	310558	235638	174714	126813
1.75	999842	994888	977842	942603	886557	811184	721236	623222	523854	428900	342561	267322	204132
2.00	999955	997916	989460	969373	933522	880207	810565	728135	637903	545258	455110	371329	296508
2.25	999987	999165	995109	984140	962328	926684	876004	811177	734917	651156	564295	478541	397414
2.50	999996	999670	997779	991999	979271	956534	921510	873300	812595	741529	661263	581452	499719
2.75	999999	999871	999011	996055	988886	974951	951787	917600	871676	814555	747944	674429	597077
3.00		999950	999566	998094	994178	985927	971177	947910	914664	870848	816884	754155	684802
3.25		999981	999813	999096	997013	992373	983187	967911	944753	912491	870619	819464	760158
3.50		999993	999920	999579	998496	995845	990410	980695	965104	942193	910922	870845	822213
3.75		999997	999967	999806	999256	997808	994641	988635	978453	962701	940130	909838	871424
4.00		999999	999986	999912	999637	998864	997061	993442	986972	976453	960655	938485	909147
4.25			999994	999961	999825	999421	998416	996285	992275	985433	974679	958921	937189
4.50			999998	999983	999917	999709	999160	997931	995502	991157	984020	973114	957459
4.75			999999	999992	999961	999856	999561	998866	997424	994726	990098	982733	971740
5.00				999996	999981	999930	999774	999388	998548	996906	993969	989105	981566
5.25				999998	999992	999967	999885	999674	999194	998213	996386	993240	988180
5.50				999999	999996	999985	999942	999828	999558	998983	997867	995871	992544
5.75					999998	999993	999972	999911	999761	999429	998759	997516	995368
6.00					999999	999998	999986	999954	999872	999684	999287	998526	997164
6.25						999999	999993	999977	999933	999827	999596	999137	998288
6.50							999997	999988	999965	999907	999774	999501	998979
6.75							999999	999994	999982	999950	999875	999715	999399
7.00								999997	999990	999974	999932	999839	999651
7.25								999998	999995	999986	999963	999910	999799
7.50								999999	999998	999993	999980	999951	999886
7.75									999999	999996	999990	999973	999936
8.00										999998	999995	999985	999964
8.25										999999	999997	999992	999980
8.50											999999	999996	999989
8.75												999998	999994
9.00												999999	999997
9.25													999998
9.50													999999
9.75													

$\xi \backslash \eta$	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.05	1												
0.10	4	1											
0.15	11	2											
0.20	25	5	1										
0.25	53	11	2										
0.50	690	187	49	12	1								
0.75	3642	1167	359	106	8	1							
1.00	12179	4496	1580	532	54	5							
1.25	30611	12771	5046	1901	239	26	3						
1.50	63074	29318	12850	5350	813	107	12	1					
1.75	112169	57431	27640	12597	2274	351	48	6	1				
2.00	178060	99469	52116	25794	5453	977	153	21	3				
2.25	258323	156137	88401	47199	11545	2375	423	67	9				
2.50	348518	226211	137485	78717	22046	5160	1040	184	29	1			
2.75	443162	306738	198912	121473	38594	10197	2306	457	81	2			
3.00	536774	393602	270792	175505	62721	18571	4686	1031	202	6			
3.25	624702	482259	350107	239688	95588	31509	8820	2145	461	16			
3.50	703600	568426	433196	311864	137754	50243	15519	4150	979	40	1		
3.75	771566	648595	516296	389155	189023	75843	25722	7532	1939	93	3		
4.00	828005	720310	596012	468361	248426	109046	40422	12908	3615	203	8		
4.25	873339	782220	669647	546358	314311	150126	60554	21010	6379	417	19	1	
4.50	908667	833959	735361	620424	384530	198808	86887	32635	10708	813	42	2	
4.75	935442	875931	792184	688453	456684	254267	119906	48587	17175	1505	89	4	
5.00	955223	909061	839911	749051	528375	315190	159730	69589	26428	2661	179	9	
5.25	969495	934558	878935	801520	597424	379902	206065	96207	39141	4507	344	19	1
5.50	979569	953724	910057	845769	662037	446529	258206	128768	55970	7336	634	39	2
5.75	986536	967819	934306	882183	720892	513159	315084	167305	77485	11511	1122	77	4
6.00	991262	977975	952794	911469	773172	578005	375349	211529	104111	17456	1913	147	8
6.25	994412	985153	966604	934522	818530	639528	437487	260834	136071	25642	3149	269	17
6.50	996475	990136	976726	952306	857019	696517	499935	314329	173351	36567	5015	477	33
6.75	997806	993537	984011	965765	889005	748127	561199	370901	215677	90722	7744	817	63
7.00	998652	995821	989166	975771	95067	793881	619946	429298	262522	68555	11618	1357	115
7.25	999181	997332	992755	983083	935911	833633	675076	488214	313131	90436	16962	2187	204
7.50	999509	998318	995216	988342	952289	867516	725765	546377	366571	116619	24135	3426	351
7.75	999708	998951	996879	992067	964942	895877	771474	602626	421785	147212	33519	5228	587
8.00	999829	999354	997988	994666	974564	919209	811937	655966	477664	182155	45499	7779	955
8.25	999900	999606	998717	996455	981769	938090	847130	705610	533111	221215	60440	11302	1514
8.50	999943	999762	999191	997671	987087	953131	877229	750997	587104	263984	78662	16052	2343
8.75	999967	999858	999495	998486	990958	964934	902560	791789	638744	309900	100419	22312	3541
9.00	999982	999916	999688	999026	993738	974063	923553	827859	687290	358273	125870	30386	5234
9.25	999990	999951	999809	999380	995710	981028	940697	859257	732180	408321	155068	40582	7574
9.50	999994	999971	999884	999609	997091	986272	954500	886181	773037	459212	187941	53203	10741
9.75	999997	999984	999930	999756	998047	990170	965464	908939	809663	510103	224292	68528	14939
10.00	999998	999991	999958	999849	998702	993033	974059	927909	842019	560186	263798	86795	20396
10.50		999997	999985	999944	999442	996602	985802	956184	894423	655058	350437	132802	36076
11.00		999999	999995	999980	999769	998403	942525	974400	932171	739153	443363	191720	59794
11.50			999998	999993	999907	999276	996207	985597	958047	809758	537365	262599	93366
12.00			999999	999998	999964	999682	998141	992183	974983	866108	627388	343022	138033
12.50				999999	999986	999865	999119	995901	985596	908991	709289	429407	194104
13.00					999995	999944	999595	997920	991980	940201	780292	517534	260749
13.50					999998	999978	999820	998977	995676	961978	839111	603176	335986
14.00					999999	999991	999922	999511	997740	976581	885790	682672	416893
15.00						999999	999986	999897	999434	991888	947439	813595	581667
16.00							999998	999980	999873	997494	978458	902095	728568
17.00								999996	999974	999303	992086	953862	840958
18.00								999999	999995	999824	997377	980402	915741

表 1.9 $\rho = 0.9$

η	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.05	393469	67072	10829	1682	254	37	5	1					
0.10	632120	154956	33275	6577	1226	219	38	6	1				
0.15	776870	253210	67732	16105	3532	730	144	27	5	1			
0.20	864665	353707	113279	31398	7887	1842	407	86	17	3	1		
0.25	917915	450652	148099	53177	15028	3907	952	220	49	10	2		
0.50	991262	800738	498783	254385	111574	43548	15490	5107	1581	463	130	35	9
0.75	999447	942534	765641	525760	310558	161574	75614	32373	12850	4780	1680	562	180
1.00	999955	985721	909041	749683	545258	351710	203717	107371	52116	23536	9976	3997	1523
1.25	999996	996810	969322	886578	741529	560877	384040	239659	137485	73130	36353	17006	7532
1.50		999342	990727	954618	870848	737341	574093	410625	270792	165584	94471	50597	25581
1.75		999873	997434	983613	942193	859464	735431	585660	433196	298153	191663	115601	65729
2.00		999977	999339	994570	976453	931844	851036	734934	596012	452817	322504	215853	136220
2.25		999996	999840	998327	991157	969681	923238	844704	735361	605430	470181	344411	238325
2.50		999999	999963	999516	996906	987502	963465	916062	839911	736415	614059	485767	364301
2.75			999992	999868	998982	975184	983806	957841	910057	836278	737905	622154	499917
3.00			999998	999965	999683	998252	993267	980191	952794	905015	833538	739704	629692
3.25				999991	999906	999399	997358	991240	976726	948284	900771	831499	741724
3.50				999998	999973	999803	999016	996334	989166	973451	944263	897191	830018
3.75				999999	999992	999938	999650	998542	995216	987093	970383	940681	894171
4.00					999998	999981	999881	999446	997988	994034	985056	967525	937494
4.25					999999	999994	999961	999799	999191	997368	992815	983076	964876
4.50					999998	999988	999930	999688	998889	996698	991578	981169	
4.75						999999	999996	999976	999884	999549	998545	995986	990340
5.00							999999	999992	999959	999824	999384	998163	995247
5.25							999998	999986	999933	999748	999191	997751	
5.50							999999	999995	999976	999901	999656	998975	
5.75								999999	999991	999962	999859	999549	
6.00									999997	999986	999944	999808	
6.25										999999	999995	999978	999920
6.50											999999	999992	999968
6.75												999997	999988
7.00												999999	999995
7.25													999998
7.50													999999

$\xi \backslash \eta$	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.05													
0.10													
0.15													
0.20													
0.25													
0.50	1												
0.75	16	1											
1.00	194	21	2										
1.25	1280	184	23	3									
1.50	5611	1031	163	23									
1.75	18123	4150	810	138	3								
2.00	46153	12909	3057	626	18								
2.25	97193	32635	9234	2247	91	2							
2.50	175386	69589	23206	6629	363	13							
2.75	278803	128768	49978	16576	1211	56	2						
3.00	399274	211529	94422	35991	3446	206	8						
3.25	524853	314329	159492	69195	8548	652	33	1					
3.50	643505	429297	244740	119710	18794	1808	115	5					
3.75	746196	546377	345868	188933	37148	4456	351	19					
4.00	828327	655966	455581	275274	66815	9888	955	64	3				
4.25	889479	750997	565349	374161	110495	19960	2343	189	11				
4.50	932139	827859	667356	478945	169562	37000	5234	507	35				
4.75	960171	886181	755947	582336	243446	63503	10741	1239	102				
5.00	977606	927909	828238	677870	329452	101649	20396	2784	271	1			
5.25	987911	956184	883923	760941	423135	152754	36076	5789	659	4			
5.50	993722	974400	924582	829216	519070	216807	59794	11212	1487	11			
5.75	996857	985597	952826	882456	611822	292258	93367	20333	3126	30			
6.00	998480	992183	971551	921984	696801	376126	138033	34698	6154	78			
6.25	999289	995901	983436	950010	770833	464412	194104	55972	11397	189	1		
6.50	999678	997920	990675	969039	832344	552716	260749	85703	19936	428	3		
6.75	999858	998977	994917	981444	881219	636883	335986	125047	33067	916	9		
7.00	999939	999511	997314	989225	918452	713538	416893	174497	52193	1850	23		
7.25	999975	999773	998622	993931	945706	780408	499982	233688	78656	3542	55		
7.50	999990	999897	999313	996680	964915	836406	581668	301336	113525	6446	125	1	
7.75	999996	999955	999667	998235	977976	881516	658712	375325	157394	11186	270	3	
8.00	999998	999980	999843	999087	986558	916538	728568	452932	210205	18557	556	7	
8.25	999999	999992	999928	999540	992017	942787	789568	531153	271164	29506	1091	16	
8.50		999996	999967	999774	995382	961811	840957	607048	338763	45070	2047	37	
8.75		999998	999986	999892	997396	975163	882789	678055	410906	66284	3679	80	1
9.00		999999	999994	999950	998567	984250	915741	742216	485123	94061	6345	167	2
9.25			999998	999978	999230	990256	940893	798287	558836	129058	10526	335	5
9.50			999999	999990	999596	994114	959522	845745	629619	171554	16824	643	11
9.75				999996	999792	996526	972923	884696	695421	221355	25957	1188	24
10.00				999999	999896	997996	982300	915733	754716	277760	38719	2114	50
10.50					999975	999375	992926	957883	850619	405225	78371	6018	200
11.00					999994	999821	997404	980684	916289	540451	141251	15016	692
11.50					999999	999952	999122	991844	956762	668326	229346	33180	2088
12.00						999988	999725	996818	979368	776919	339262	65589	5574
12.50						999997	999920	998849	990880	860291	462276	117081	13269
13.00						999999	999978	999613	996255	918504	586571	190437	28401
13.50							999995	999878	998567	955673	700622	284731	55088
14.00							999999	999964	999488	977484	796165	394715	97553
15.00								999997	999947	995231	921588	625807	239527
16.00									999996	999211	976392	813072	444593
17.00									999999	999895	994384	925102	659695
18.00										999987	998931	975879	828078

$F(\xi \eta)$	1.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	12.0	14.0	16.0	18.0
0.01	0.138	0.164	0.184	0.199	0.214	0.229	0.244	0.259	0.274	0.289	0.304	0.319	0.334	0.349
0.02	0.204	0.230	0.250	0.265	0.280	0.295	0.310	0.325	0.340	0.355	0.370	0.385	0.400	0.415
0.03	0.269	0.295	0.315	0.330	0.345	0.360	0.375	0.390	0.405	0.420	0.435	0.450	0.465	0.480
0.04	0.334	0.360	0.380	0.395	0.410	0.425	0.440	0.455	0.470	0.485	0.500	0.515	0.530	0.545
0.05	0.399	0.425	0.445	0.460	0.475	0.490	0.505	0.520	0.535	0.550	0.565	0.580	0.595	0.610
0.06	0.464	0.490	0.510	0.525	0.540	0.555	0.570	0.585	0.600	0.615	0.630	0.645	0.660	0.675
0.07	0.529	0.555	0.575	0.590	0.605	0.620	0.635	0.650	0.665	0.680	0.695	0.710	0.725	0.740
0.08	0.594	0.620	0.640	0.655	0.670	0.685	0.700	0.715	0.730	0.745	0.760	0.775	0.790	0.805
0.09	0.659	0.685	0.705	0.720	0.735	0.750	0.765	0.780	0.795	0.810	0.825	0.840	0.855	0.870
0.10	0.724	0.750	0.770	0.785	0.800	0.815	0.830	0.845	0.860	0.875	0.890	0.905	0.920	0.935
0.11	0.789	0.815	0.835	0.850	0.865	0.880	0.895	0.910	0.925	0.940	0.955	0.970	0.985	1.000
0.12	0.854	0.880	0.900	0.915	0.930	0.945	0.960	0.975	0.990	1.005	1.020	1.035	1.050	1.065
0.13	0.919	0.945	0.965	0.980	0.995	1.010	1.025	1.040	1.055	1.070	1.085	1.100	1.115	1.130
0.14	0.984	1.010	1.030	1.045	1.060	1.075	1.090	1.105	1.120	1.135	1.150	1.165	1.180	1.195
0.15	1.049	1.075	1.095	1.110	1.125	1.140	1.155	1.170	1.185	1.200	1.215	1.230	1.245	1.260
0.16	1.114	1.140	1.160	1.175	1.190	1.205	1.220	1.235	1.250	1.265	1.280	1.295	1.310	1.325
0.17	1.179	1.205	1.225	1.240	1.255	1.270	1.285	1.300	1.315	1.330	1.345	1.360	1.375	1.390
0.18	1.244	1.270	1.290	1.305	1.320	1.335	1.350	1.365	1.380	1.395	1.410	1.425	1.440	1.455
0.19	1.309	1.335	1.355	1.370	1.385	1.400	1.415	1.430	1.445	1.460	1.475	1.490	1.505	1.520
0.20	1.374	1.400	1.420	1.435	1.450	1.465	1.480	1.495	1.510	1.525	1.540	1.555	1.570	1.585
0.21	1.439	1.465	1.485	1.500	1.515	1.530	1.545	1.560	1.575	1.590	1.605	1.620	1.635	1.650
0.22	1.504	1.530	1.550	1.565	1.580	1.595	1.610	1.625	1.640	1.655	1.670	1.685	1.700	1.715
0.23	1.569	1.595	1.615	1.630	1.645	1.660	1.675	1.690	1.705	1.720	1.735	1.750	1.765	1.780
0.24	1.634	1.660	1.680	1.695	1.710	1.725	1.740	1.755	1.770	1.785	1.800	1.815	1.830	1.845
0.25	1.699	1.725	1.745	1.760	1.775	1.790	1.805	1.820	1.835	1.850	1.865	1.880	1.895	1.910
0.26	1.764	1.790	1.810	1.825	1.840	1.855	1.870	1.885	1.900	1.915	1.930	1.945	1.960	1.975
0.27	1.829	1.855	1.875	1.890	1.905	1.920	1.935	1.950	1.965	1.980	1.995	2.010	2.025	2.040
0.28	1.894	1.920	1.940	1.955	1.970	1.985	2.000	2.015	2.030	2.045	2.060	2.075	2.090	2.105
0.29	1.959	1.985	2.005	2.020	2.035	2.050	2.065	2.080	2.095	2.110	2.125	2.140	2.155	2.170
0.30	2.024	2.050	2.070	2.085	2.100	2.115	2.130	2.145	2.160	2.175	2.190	2.205	2.220	2.235
0.31	2.089	2.115	2.135	2.150	2.165	2.180	2.195	2.210	2.225	2.240	2.255	2.270	2.285	2.300
0.32	2.154	2.180	2.200	2.215	2.230	2.245	2.260	2.275	2.290	2.305	2.320	2.335	2.350	2.365
0.33	2.219	2.245	2.265	2.280	2.295	2.310	2.325	2.340	2.355	2.370	2.385	2.400	2.415	2.430
0.34	2.284	2.310	2.330	2.345	2.360	2.375	2.390	2.405	2.420	2.435	2.450	2.465	2.480	2.495
0.35	2.349	2.375	2.395	2.410	2.425	2.440	2.455	2.470	2.485	2.500	2.515	2.530	2.545	2.560
0.36	2.414	2.440	2.460	2.475	2.490	2.505	2.520	2.535	2.550	2.565	2.580	2.595	2.610	2.625
0.37	2.479	2.505	2.525	2.540	2.555	2.570	2.585	2.600	2.615	2.630	2.645	2.660	2.675	2.690
0.38	2.544	2.570	2.590	2.605	2.620	2.635	2.650	2.665	2.680	2.695	2.710	2.725	2.740	2.755
0.39	2.609	2.635	2.655	2.670	2.685	2.700	2.715	2.730	2.745	2.760	2.775	2.790	2.805	2.820
0.40	2.674	2.700	2.720	2.735	2.750	2.765	2.780	2.795	2.810	2.825	2.840	2.855	2.870	2.885
0.41	2.739	2.765	2.785	2.800	2.815	2.830	2.845	2.860	2.875	2.890	2.905	2.920	2.935	2.950
0.42	2.804	2.830	2.850	2.865	2.880	2.895	2.910	2.925	2.940	2.955	2.970	2.985	3.000	3.015
0.43	2.869	2.895	2.915	2.930	2.945	2.960	2.975	2.990	3.005	3.020	3.035	3.050	3.065	3.080
0.44	2.934	2.960	2.980	2.995	3.010	3.025	3.040	3.055	3.070	3.085	3.100	3.115	3.130	3.145
0.45	2.999	3.025	3.045	3.060	3.075	3.090	3.105	3.120	3.135	3.150	3.165	3.180	3.195	3.210
0.46	3.064	3.090	3.110	3.125	3.140	3.155	3.170	3.185	3.200	3.215	3.230	3.245	3.260	3.275
0.47	3.129	3.155	3.175	3.190	3.205	3.220	3.235	3.250	3.265	3.280	3.295	3.310	3.325	3.340
0.48	3.194	3.220	3.240	3.255	3.270	3.285	3.300	3.315	3.330	3.345	3.360	3.375	3.390	3.405
0.49	3.259	3.285	3.305	3.320	3.335	3.350	3.365	3.380	3.395	3.410	3.425	3.440	3.455	3.470
0.50	3.324	3.350	3.370	3.385	3.400	3.415	3.430	3.445	3.460	3.475	3.490	3.505	3.520	3.535
0.51	3.389	3.415	3.435	3.450	3.465	3.480	3.495	3.510	3.525	3.540	3.555	3.570	3.585	3.600
0.52	3.454	3.480	3.500	3.515	3.530	3.545	3.560	3.575	3.590	3.605	3.620	3.635	3.650	3.665
0.53	3.519	3.545	3.565	3.580	3.595	3.610	3.625	3.640	3.655	3.670	3.685	3.700	3.715	3.730
0.54	3.584	3.610	3.630	3.645	3.660	3.675	3.690	3.705	3.720	3.735	3.750	3.765	3.780	3.795
0.55	3.649	3.675	3.695	3.710	3.725	3.740	3.755	3.770	3.785	3.800	3.815	3.830	3.845	3.860
0.56	3.714	3.740	3.760	3.775	3.790	3.805	3.820	3.835	3.850	3.865	3.880	3.895	3.910	3.925
0.57	3.779	3.805	3.825	3.840	3.855	3.870	3.885	3.900	3.915	3.930	3.945	3.960	3.975	3.990
0.58	3.844	3.870	3.890	3.905	3.920	3.935	3.950	3.965	3.980	3.995	4.010	4.025	4.040	4.055
0.59	3.909	3.935	3.955	3.970	3.985	4.000	4.015	4.030	4.045	4.060	4.075	4.090	4.105	4.120
0.60	3.974	3.999	4.019	4.034	4.049	4.064	4.079	4.094	4.109	4.124	4.139	4.154	4.169	4.184
0.61	4.039	4.065	4.085	4.100	4.115	4.130	4.145	4.160	4.175	4.190	4.205	4.220	4.235	4.250
0.62	4.104	4.130	4.150	4.165	4.180	4.195	4.210	4.225	4.240	4.255	4.270	4.285	4.300	4.315
0.63	4.169	4.195	4.215	4.230	4.245	4.260	4.275	4.290	4.305	4.320	4.335	4.350	4.365	4.380
0.64	4.234	4.260	4.280	4.295	4.310	4.325	4.340	4.355	4.370	4.385	4.400	4.415	4.430	4.445
0.65	4.299	4.325	4.345	4.360	4.375	4.390	4.405	4.420	4.435	4.450	4.465	4.480	4.495	4.510
0.66	4.364	4.390	4.410	4.425	4.440	4.455	4.470	4.485	4.500	4.515	4.530	4.545	4.560	4.575
0.67	4.429	4.455	4.475	4.490	4.505	4.520	4.535	4.550	4.565	4.580	4.595	4.610	4.625	4.640
0.68	4.494	4.520	4.540	4.555	4.570	4.585	4.600	4.615	4.630	4.645	4.660	4.675	4.690	4.705
0.69	4.559	4.585	4.605	4.620	4.635	4.650	4.665	4.680	4.695	4.710	4.725	4.740	4.755	4.770
0.70	4.624	4.650	4.670	4.685	4.700	4.715	4.730	4.745	4.760	4.775	4.790	4.805	4.820	4.835
0.71	4.689	4.715	4.735	4.750	4.765	4.780	4.795	4.810	4.825	4.840	4.855	4.870	4.885	4.900
0.72	4.754	4.780	4.800	4.815	4.830	4.845	4.860	4.875	4.890	4.905	4.920	4.935	4.950	4.965
0.73	4.819	4.845	4.865	4.880	4.895	4.910	4.925	4.940	4.955	4.970	4.985	5.000	5.015	5.030
0.74	4.884	4.910	4.930	4.945	4.960	4.975	4.990	5.005	5.020	5.035	5.050	5.065	5.080	5.095
0.75	4.949	4.975	4.995	5.010	5.025	5.040	5.055	5.070	5.085	5.100	5.115	5.130	5.145	5.160
0.76	5.014	5.040	5.060	5.075	5.090	5.105	5.120	5.135	5.150	5.165	5.180	5.195	5.210	5.225
0.77	5.079	5.105	5.125	5.140	5.155	5.170	5.185	5.200	5.215	5.230	5.245	5.260	5.275	5.290
0.78	5.144	5.170	5.190	5.205	5.220	5.235	5.250	5.265	5.280	5.295	5.310	5.325	5.340	5.355
0.79	5.209	5.235	5.255	5.270	5.285	5.300	5.315	5.330	5.345	5.360	5.375	5.390	5.405	5.420
0.80	5.274	5.300	5.320	5.335										

表 2.2 $\rho = 0.2$

F	E	η	0.00	0.25	0.50	-0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.001	0.004	-3	0.8320	-1	0.9670	-1	0.9655	-2	0.9648	-2	0.9642	-2	0.9637	-2	0.9632
0.002	0.007	-2	0.1707	-2	0.1815	-2	0.1832	-2	0.1848	-2	0.1862	-2	0.1875	-2	0.1889
0.003	0.010	-2	0.2559	-2	0.2724	-2	0.2808	-2	0.2885	-2	0.2952	-2	0.3012	-2	0.3067
0.004	0.013	-2	0.3417	-2	0.3648	-2	0.3897	-2	0.4167	-2	0.4452	-2	0.4752	-2	0.5067
0.005	0.016	-2	0.4284	-2	0.4582	-2	0.4948	-2	0.5337	-2	0.5752	-2	0.6192	-2	0.6657
0.006	0.019	-2	0.5152	-2	0.5508	-2	0.5902	-2	0.6327	-2	0.6782	-2	0.7267	-2	0.7772
0.007	0.022	-2	0.6020	-2	0.6432	-2	0.6882	-2	0.7367	-2	0.7882	-2	0.8427	-2	0.8992
0.008	0.025	-2	0.6888	-2	0.7352	-2	0.7852	-2	0.8387	-2	0.8947	-2	0.9532	-2	1.0137
0.009	0.028	-2	0.7752	-2	0.8262	-2	0.8812	-2	0.9392	-2	0.9992	-2	1.0612	-2	1.1252
0.010	0.031	-2	0.8620	-2	0.9182	-2	0.9782	-2	1.0412	-2	1.1062	-2	1.1732	-2	1.2422
0.011	0.034	-2	0.9488	-2	1.0092	-2	1.0732	-2	1.1402	-2	1.2092	-2	1.2802	-2	1.3532
0.012	0.037	-2	1.0352	-2	1.0992	-2	1.1672	-2	1.2382	-2	1.3112	-2	1.3862	-2	1.4632
0.013	0.040	-2	1.1212	-2	1.1882	-2	1.2602	-2	1.3352	-2	1.4122	-2	1.4912	-2	1.5722
0.014	0.043	-2	1.2072	-2	1.2762	-2	1.3492	-2	1.4252	-2	1.5032	-2	1.5832	-2	1.6652
0.015	0.046	-2	1.2932	-2	1.3642	-2	1.4382	-2	1.5152	-2	1.5942	-2	1.6752	-2	1.7582
0.016	0.049	-2	1.3792	-2	1.4522	-2	1.5282	-2	1.6072	-2	1.6882	-2	1.7712	-2	1.8562
0.017	0.052	-2	1.4652	-2	1.5402	-2	1.6182	-2	1.7002	-2	1.7832	-2	1.8682	-2	1.9552
0.018	0.055	-2	1.5512	-2	1.6282	-2	1.7082	-2	1.7922	-2	1.8772	-2	1.9642	-2	2.0532
0.019	0.058	-2	1.6372	-2	1.7162	-2	1.7982	-2	1.8842	-2	1.9712	-2	2.0602	-2	2.1512
0.020	0.061	-2	1.7232	-2	1.8042	-2	1.8882	-2	1.9752	-2	2.0642	-2	2.1552	-2	2.2482
0.021	0.064	-2	1.8092	-2	1.8922	-2	1.9782	-2	2.0672	-2	2.1582	-2	2.2512	-2	2.3462
0.022	0.067	-2	1.8952	-2	1.9792	-2	2.0672	-2	2.1582	-2	2.2512	-2	2.3462	-2	2.4432
0.023	0.070	-2	1.9812	-2	2.0672	-2	2.1582	-2	2.2512	-2	2.3462	-2	2.4432	-2	2.5422
0.024	0.073	-2	2.0672	-2	2.1542	-2	2.2462	-2	2.3412	-2	2.4382	-2	2.5362	-2	2.6362
0.025	0.076	-2	2.1532	-2	2.2412	-2	2.3332	-2	2.4292	-2	2.5272	-2	2.6262	-2	2.7282
0.026	0.079	-2	2.2392	-2	2.3282	-2	2.4212	-2	2.5172	-2	2.6152	-2	2.7152	-2	2.8182
0.027	0.082	-2	2.3252	-2	2.4162	-2	2.5112	-2	2.6092	-2	2.7092	-2	2.8112	-2	2.9162
0.028	0.085	-2	2.4112	-2	2.5042	-2	2.6002	-2	2.6982	-2	2.7982	-2	2.9002	-2	3.0042
0.029	0.088	-2	2.4972	-2	2.5922	-2	2.6902	-2	2.7892	-2	2.8902	-2	2.9932	-2	3.0982
0.030	0.091	-2	2.5832	-2	2.6802	-2	2.7802	-2	2.8812	-2	2.9842	-2	3.0892	-2	3.1962
0.031	0.094	-2	2.6692	-2	2.7672	-2	2.8692	-2	2.9722	-2	3.0772	-2	3.1842	-2	3.2932
0.032	0.097	-2	2.7552	-2	2.8542	-2	2.9592	-2	3.0652	-2	3.1732	-2	3.2832	-2	3.3952
0.033	0.100	-2	2.8412	-2	2.9412	-2	3.0482	-2	3.1562	-2	3.2662	-2	3.3782	-2	3.4922
0.034	0.103	-2	2.9272	-2	3.0282	-2	3.1362	-2	3.2462	-2	3.3582	-2	3.4722	-2	3.5882
0.035	0.106	-2	3.0132	-2	3.1152	-2	3.2252	-2	3.3372	-2	3.4512	-2	3.5672	-2	3.6852
0.036	0.109	-2	3.0992	-2	3.2022	-2	3.3142	-2	3.4282	-2	3.5442	-2	3.6622	-2	3.7822
0.037	0.112	-2	3.1852	-2	3.2892	-2	3.4022	-2	3.5172	-2	3.6342	-2	3.7532	-2	3.8742
0.038	0.115	-2	3.2712	-2	3.3762	-2	3.4902	-2	3.6062	-2	3.7242	-2	3.8442	-2	3.9662
0.039	0.118	-2	3.3572	-2	3.4632	-2	3.5782	-2	3.6952	-2	3.8142	-2	3.9362	-2	4.0602
0.040	0.121	-2	3.4432	-2	3.5502	-2	3.6662	-2	3.7842	-2	3.9042	-2	4.0272	-2	4.1522
0.041	0.124	-2	3.5292	-2	3.6372	-2	3.7542	-2	3.8732	-2	3.9942	-2	4.1172	-2	4.2432
0.042	0.127	-2	3.6152	-2	3.7242	-2	3.8422	-2	3.9622	-2	4.0842	-2	4.2082	-2	4.3342
0.043	0.130	-2	3.7012	-2	3.8112	-2	3.9302	-2	4.0512	-2	4.1742	-2	4.2992	-2	4.4262
0.044	0.133	-2	3.7872	-2	3.8982	-2	4.0182	-2	4.1402	-2	4.2642	-2	4.3902	-2	4.5142
0.045	0.136	-2	3.8732	-2	3.9852	-2	4.1062	-2	4.2292	-2	4.3542	-2	4.4812	-2	4.6082
0.046	0.139	-2	3.9592	-2	4.0722	-2	4.1942	-2	4.3182	-2	4.4442	-2	4.5722	-2	4.7022
0.047	0.142	-2	4.0452	-2	4.1592	-2	4.2822	-2	4.4072	-2	4.5342	-2	4.6632	-2	4.7942
0.048	0.145	-2	4.1312	-2	4.2462	-2	4.3702	-2	4.4962	-2	4.6242	-2	4.7542	-2	4.8862
0.049	0.148	-2	4.2172	-2	4.3332	-2	4.4582	-2	4.5852	-2	4.7142	-2	4.8462	-2	4.9802
0.050	0.151	-2	4.3032	-2	4.4202	-2	4.5462	-2	4.6742	-2	4.8042	-2	4.9362	-2	5.0722
0.051	0.154	-2	4.3892	-2	4.5072	-2	4.6342	-2	4.7632	-2	4.8942	-2	5.0272	-2	5.1642
0.052	0.157	-2	4.4752	-2	4.5942	-2	4.7222	-2	4.8522	-2	4.9842	-2	5.1182	-2	5.2582
0.053	0.160	-2	4.5612	-2	4.6812	-2	4.8102	-2	4.9412	-2	5.0742	-2	5.2082	-2	5.3502
0.054	0.163	-2	4.6472	-2	4.7682	-2	4.8982	-2	5.0302	-2	5.1642	-2	5.2992	-2	5.4422
0.055	0.166	-2	4.7332	-2	4.8542	-2	4.9852	-2	5.1182	-2	5.2542	-2	5.3902	-2	5.5342
0.056	0.169	-2	4.8192	-2	4.9412	-2	5.0722	-2	5.2062	-2	5.3432	-2	5.4802	-2	5.6262
0.057	0.172	-2	4.9052	-2	5.0282	-2	5.1602	-2	5.2952	-2	5.4332	-2	5.5712	-2	5.7182
0.058	0.175	-2	4.9912	-2	5.1142	-2	5.2462	-2	5.3832	-2	5.5232	-2	5.6642	-2	5.8102
0.059	0.178	-2	5.0772	-2	5.2002	-2	5.3332	-2	5.4722	-2	5.6142	-2	5.7582	-2	5.9062
0.060	0.181	-2	5.1632	-2	5.2862	-2	5.4202	-2	5.5612	-2	5.7052	-2	5.8512	-2	6.0002
0.061	0.184	-2	5.2492	-2	5.3722	-2	5.5072	-2	5.6502	-2	5.7962	-2	5.9442	-2	6.0962
0.062	0.187	-2	5.3352	-2	5.4582	-2	5.5942	-2	5.7392	-2	5.8872	-2	6.0372	-2	6.1942
0.063	0.190	-2	5.4212	-2	5.5442	-2	5.6812	-2	5.8282	-2	5.9782	-2	6.1322	-2	6.2942
0.064	0.193	-2	5.5072	-2	5.6302	-2	5.7682	-2	5.9172	-2	6.0692	-2	6.2242	-2	6.3962
0.065	0.196	-2	5.5932	-2	5.7162	-2	5.8552	-2	6.0062	-2	6.1602	-2	6.3162	-2	6.4982
0.066	0.199	-2	5.6792	-2	5.8022	-2	5.9422	-2	6.0942	-2	6.2502	-2	6.4082	-2	6.6022
0.067	0.202	-2	5.7652	-2	5.8882	-2	6.0292	-2	6.1802	-2	6.3342	-2	6.4882	-2	6.7062
0.068	0.205	-2	5.8512	-2	5.9742	-2	6.1152	-2	6.2672	-2	6.4222	-2	6.5742	-2	6.8102
0.069	0.208	-2	5.9372	-2	6.0602	-2	6.2012	-2	6.3542	-2	6.5092	-2	6.6612	-2	6.9142
0.070	0.211	-2	6.0232	-2	6.1462	-2	6.2832	-2	6.4332	-2	6.5862	-2	6.7432	-2	7.0182
0.071	0.214	-2	6.1092	-2	6.2322	-2	6.3692	-2	6.5202	-2	6.6742	-2	6.8312	-2	7.1222
0.072	0.217	-2	6.1952	-2	6.3182	-2	6.4552	-2	6.6072	-2	6.7632	-2	6.9222	-2	7.2262
0.073	0.220	-2	6.2812	-2	6.4042	-2	6.5422	-2	6.6952	-2	6.8532	-2	7.0142	-2	7.3302
0.074	0.223	-2	6.3672	-2	6.4902	-2	6.6282	-2	6.7822	-2	6.9412	-2	7.1182	-2	7.4342
0.075	0.226	-2	6.4532	-2	6.5762	-2	6.7142	-2	6.8692	-2	7.0292	-2	7.2242	-2	7.5382
0.076	0.229	-2	6.5392	-2	6.6622	-2	6.8002	-2	6.9562	-2	7.1172	-2	7.3242	-2	7.6422
0.077	0.232	-2	6.6252	-2	6.7482	-2	6.8862	-2	7.0432	-2	7.2032	-2	7.4182	-2	7.7462
0.078	0.235	-2	6.7112	-2	6.8342	-2	6.9722	-2	7.1302	-2	7.2912	-2	7.5162	-2	7.8502
0.079	0.238	-2	6.7972	-2	6.9202	-2	7.0582	-2	7.2172	-2	7.3792	-2	7.6042	-2	7.9542
0.080	0.241	-2	6.8832	-2	7.0062	-2	7.1442	-2	7.3042	-2	7.4672	-2	7.6922	-2	8.0582
0.081	0.244	-2	6.9692	-2	7.0922	-2	7.2302	-2	7.3912	-2	7.5552	-2	7.7822	-2	8.1622
0.082	0.247	-2	7.0552	-2	7.1782	-2	7.3162	-2	7.4772	-2	7.6422	-2	7.8702	-2	8.2662
0.083	0.250	-2	7.1412	-2	7.2642	-2	7.4022	-2	7.5642	-2	7.7302	-2	7.9602	-2	8.3702
0.084	0.253	-2	7.2272	-2	7.3502	-2	7.4882	-2	7.6512	-2	7.8182	-2	8.0502	-2	8.4742
0.085	0.256	-2	7.3132	-2	7.4362	-2	7.5742	-2	7.7372	-2	7.9052	-2	8.1382	-2	8.5782
0.086	0.259	-2	7.3992	-2	7.5222	-2	7.6602	-2							

$1 - \varepsilon$	η	3.5	4.0	4.5	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	12.0	14.0	16.0	18.0
0.001		0.1919	0.2175	0.2464	0.2781	0.3581	0.4594	0.5890	0.7546	0.9659	1.1761	1.3548	1.4908	1.5915
0.002		0.1839	0.2104	0.2402	0.2729	0.3530	0.4544	0.5840	0.7496	0.9605	1.1707	1.3494	1.4854	1.5861
0.004		0.1681	0.1957	0.2265	0.2602	0.3404	0.4418	0.5714	0.7370	0.9479	1.1581	1.3368	1.4728	1.5735
0.005		0.1603	0.1879	0.2187	0.2524	0.3326	0.4340	0.5636	0.7292	0.9391	1.1493	1.3280	1.4640	1.5647
0.006		0.1535	0.1811	0.2119	0.2456	0.3258	0.4272	0.5568	0.7220	0.9319	1.1421	1.3208	1.4568	1.5575
0.007		0.1475	0.1751	0.2059	0.2396	0.3198	0.4212	0.5504	0.7158	0.9271	1.1373	1.3160	1.4518	1.5525
0.008		0.1423	0.1700	0.2007	0.2344	0.3146	0.4160	0.5452	0.7106	0.9229	1.1321	1.3108	1.4466	1.5473
0.009		0.1377	0.1654	0.1961	0.2298	0.3094	0.4108	0.5399	0.7054	0.9187	1.1269	1.3056	1.4414	1.5421
0.01		0.1335	0.1612	0.1919	0.2256	0.3052	0.4056	0.5357	0.7002	0.9145	1.1227	1.3014	1.4372	1.5379
0.02		0.1250	0.1527	0.1834	0.2172	0.2968	0.3972	0.5268	0.6910	0.9000	1.1082	1.2870	1.4228	1.5234
0.03		0.1175	0.1452	0.1759	0.2096	0.2892	0.3896	0.5192	0.6834	0.8924	1.1006	1.2794	1.4152	1.5158
0.04		0.1110	0.1387	0.1694	0.2032	0.2828	0.3832	0.5128	0.6770	0.8860	1.0942	1.2730	1.4088	1.5094
0.05		0.1055	0.1332	0.1639	0.1976	0.2773	0.3777	0.5073	0.6715	0.8805	1.0887	1.2675	1.4033	1.5039
0.06		0.1000	0.1277	0.1584	0.1921	0.2718	0.3722	0.5018	0.6660	0.8750	1.0832	1.2620	1.3978	1.4984
0.07		0.0945	0.1222	0.1529	0.1866	0.2663	0.3667	0.4963	0.6605	0.8695	1.0777	1.2565	1.3923	1.4929
0.08		0.0890	0.1167	0.1474	0.1811	0.2608	0.3612	0.4908	0.6550	0.8640	1.0722	1.2510	1.3868	1.4874
0.09		0.0835	0.1112	0.1419	0.1756	0.2553	0.3557	0.4853	0.6495	0.8585	1.0667	1.2455	1.3813	1.4819
0.10		0.0780	0.1057	0.1364	0.1701	0.2498	0.3502	0.4798	0.6440	0.8530	1.0612	1.2400	1.3758	1.4764
0.11		0.0725	0.1002	0.1309	0.1646	0.2443	0.3447	0.4743	0.6385	0.8475	1.0557	1.2345	1.3703	1.4709
0.12		0.0670	0.0947	0.1254	0.1591	0.2388	0.3392	0.4688	0.6330	0.8420	1.0502	1.2290	1.3648	1.4654
0.13		0.0615	0.0892	0.1200	0.1536	0.2333	0.3337	0.4633	0.6275	0.8365	1.0447	1.2235	1.3593	1.4600
0.14		0.0560	0.0837	0.1145	0.1481	0.2278	0.3282	0.4578	0.6220	0.8310	1.0392	1.2180	1.3538	1.4545
0.15		0.0505	0.0782	0.1090	0.1426	0.2223	0.3227	0.4523	0.6165	0.8255	1.0337	1.2125	1.3483	1.4490
0.16		0.0450	0.0727	0.1035	0.1371	0.2168	0.3172	0.4468	0.6110	0.8200	1.0282	1.2070	1.3428	1.4435
0.17		0.0395	0.0672	0.0980	0.1316	0.2113	0.3117	0.4413	0.6055	0.8145	1.0227	1.2015	1.3373	1.4380
0.18		0.0340	0.0617	0.0925	0.1261	0.2058	0.3062	0.4358	0.6000	0.8090	1.0172	1.1960	1.3318	1.4325
0.19		0.0285	0.0562	0.0870	0.1206	0.2003	0.3007	0.4303	0.5945	0.8035	1.0117	1.1905	1.3263	1.4270
0.20		0.0230	0.0507	0.0815	0.1151	0.1948	0.2952	0.4248	0.5890	0.7980	1.0062	1.1850	1.3208	1.4215
0.25		0.0135	0.0312	0.0489	0.0666	0.1043	0.1720	0.2597	0.3874	0.5351	0.8548	1.1747	1.3147	1.4154
0.30		0.0070	0.0177	0.0274	0.0371	0.0548	0.0825	0.1202	0.1779	0.2656	0.4033	0.6000	0.8067	1.0134
0.35		0.0035	0.0082	0.0129	0.0176	0.0253	0.0370	0.0547	0.0824	0.1201	0.1778	0.2655	0.4032	0.6001
0.40		0.0020	0.0047	0.0074	0.0101	0.0148	0.0215	0.0312	0.0449	0.0656	0.0963	0.1370	0.1977	0.2784
0.45		0.0010	0.0024	0.0037	0.0051	0.0074	0.0107	0.0150	0.0213	0.0296	0.0419	0.0592	0.0825	0.1118
0.50		0.0005	0.0012	0.0019	0.0026	0.0039	0.0056	0.0083	0.0110	0.0153	0.0216	0.0300	0.0423	0.0586
0.55		0.0002	0.0006	0.0009	0.0013	0.0019	0.0027	0.0039	0.0054	0.0075	0.0106	0.0147	0.0200	0.0273
0.60		0.0001	0.0003	0.0005	0.0007	0.0010	0.0014	0.0020	0.0027	0.0036	0.0050	0.0068	0.0092	0.0125
0.65		0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	0.0010	0.0013	0.0017	0.0023	0.0030	0.0040	0.0053
0.70		0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	0.0009	0.0012	0.0016	0.0021	0.0027
0.75		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014
0.80		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007
0.85		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004
0.90		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002
0.95		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
1.00		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$\rho = 0.3$

F. E. n. 가

	3.5	4.0	4.5	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	12.0	14.0	16.0	18.0
0.001	0.3134	0.3779	0.4801	0.5938	0.9087	1.3779	2.0283	3.1114	4.4987	6.9312	10.1890	15.7761	24.4094
0.002	0.6260	0.7743	0.9771	1.1882	1.8182	2.7088	4.0324	6.1509	9.1931	13.8660	20.8600	31.1953	47.6844
0.003	0.9396	1.1455	1.4103	1.7342	2.6125	3.9335	5.7825	8.6545	12.9494	19.5900	29.4201	44.3765	67.4695
0.004	1.2532	1.5161	1.9031	2.3251	3.4927	5.2462	7.8264	11.6805	17.5175	26.5904	40.4531	60.8958	91.3177
0.005	0.1560	0.2171	0.2915	0.3843	0.5196	0.7015	0.9289	1.2113	1.5507	2.0904	2.9453	4.1365	5.7914
0.006	0.1870	0.2505	0.3300	0.4306	0.6012	0.8758	1.2243	1.7111	2.2282	3.1356	4.5456	6.7473	9.9714
0.007	0.2179	0.2885	0.3830	0.5046	0.7015	1.0012	1.4181	2.0283	2.8222	4.0324	5.7825	8.6545	12.9494
0.008	0.2486	0.3255	0.4359	0.5757	0.7915	1.1181	1.6181	2.3251	3.2505	4.6805	6.7473	9.9714	14.9714
0.009	0.2796	0.3619	0.4819	0.6357	0.8871	1.2505	1.7825	2.6125	3.7015	5.2462	7.5175	10.8958	16.4714
0.01	0.3104	0.4014	0.5214	0.6752	0.9307	1.2805	1.9525	2.8222	4.1365	6.0125	8.6545	12.9494	19.5900
0.02	0.6146	0.7500	0.9107	1.0999	1.5567	2.2163	3.2884	4.7814	7.0139	10.1890	15.7761	24.4094	37.1414
0.03	0.9136	1.1108	1.3355	1.5966	2.2225	3.3735	4.9787	7.1595	10.4207	15.1132	22.2282	33.1132	50.1132
0.04	0.1268	0.1696	0.2242	0.2967	0.4031	0.5561	0.7615	1.0289	1.4181	2.0283	2.9453	4.1365	5.7914
0.05	0.1498	0.1957	0.2551	0.3337	0.4494	0.6181	0.8545	1.1681	1.6181	2.3251	3.2505	4.6805	6.7473
0.06	0.1698	0.2215	0.2894	0.3751	0.4994	0.6745	0.9289	1.2805	1.7825	2.6125	3.7015	5.2462	7.5175
0.07	0.1870	0.2458	0.3219	0.4151	0.5420	0.7125	0.9619	1.3251	1.8758	2.7088	3.9335	5.5456	7.9473
0.08	0.2149	0.2781	0.3599	0.4580	0.6012	0.8012	1.0812	1.4525	2.0283	2.8222	4.1365	6.0125	8.6545
0.09	0.2427	0.3099	0.3918	0.4950	0.6482	0.8758	1.1681	1.6181	2.3251	3.2505	4.6805	6.7473	9.9714
0.10	0.2693	0.3413	0.4279	0.5370	0.7015	0.9289	1.2113	1.7111	2.2282	3.1356	4.5456	6.7473	9.9714
0.11	0.2950	0.3731	0.4651	0.5807	0.7515	0.9871	1.2805	1.7825	2.6125	3.7015	5.2462	7.5175	9.9714
0.12	0.3172	0.4014	0.4974	0.6151	0.7915	1.0012	1.2805	1.7825	2.6125	3.7015	5.2462	7.5175	9.9714
0.13	0.3350	0.4231	0.5231	0.6431	0.8231	1.0231	1.2805	1.7825	2.6125	3.7015	5.2462	7.5175	9.9714
0.14	0.3492	0.4419	0.5459	0.6679	0.8579	1.0579	1.3251	1.8758	2.7088	3.9335	5.5456	7.9473	9.9714
0.15	0.3600	0.4578	0.5658	0.6898	0.8898	1.0998	1.3701	1.9201	2.7531	3.9831	5.5931	7.9931	9.9714
0.16	0.3680	0.4690	0.5790	0.7050	0.9150	1.1250	1.4151	1.9651	2.8031	4.0331	5.6431	7.9931	9.9714
0.17	0.3730	0.4770	0.5890	0.7170	0.9270	1.1370	1.4271	1.9771	2.8151	4.0451	5.6551	7.9931	9.9714
0.18	0.3760	0.4800	0.5930	0.7200	0.9300	1.1400	1.4300	1.9800	2.8180	4.0480	5.6580	7.9931	9.9714
0.19	0.3780	0.4820	0.5950	0.7220	0.9320	1.1420	1.4320	1.9820	2.8200	4.0500	5.6600	7.9931	9.9714
0.20	0.3790	0.4830	0.5960	0.7230	0.9330	1.1430	1.4330	1.9830	2.8210	4.0510	5.6610	7.9931	9.9714
0.25	0.3840	0.4880	0.6010	0.7280	0.9380	1.1480	1.4380	1.9880	2.8260	4.0560	5.6660	7.9931	9.9714
0.30	0.3870	0.4910	0.6040	0.7310	0.9410	1.1510	1.4410	1.9910	2.8290	4.0590	5.6690	7.9931	9.9714
0.35	0.3890	0.4930	0.6060	0.7330	0.9430	1.1530	1.4430	1.9930	2.8310	4.0610	5.6710	7.9931	9.9714
0.40	0.3900	0.4940	0.6070	0.7340	0.9440	1.1540	1.4440	1.9940	2.8320	4.0620	5.6720	7.9931	9.9714
0.45	0.3910	0.4950	0.6080	0.7350	0.9450	1.1550	1.4450	1.9950	2.8330	4.0630	5.6730	7.9931	9.9714
0.50	0.3920	0.4960	0.6090	0.7360	0.9460	1.1560	1.4460	1.9960	2.8340	4.0640	5.6740	7.9931	9.9714
0.55	0.3930	0.4970	0.6100	0.7370	0.9470	1.1570	1.4470	1.9970	2.8350	4.0650	5.6750	7.9931	9.9714
0.60	0.3940	0.4980	0.6110	0.7380	0.9480	1.1580	1.4480	1.9980	2.8360	4.0660	5.6760	7.9931	9.9714
0.65	0.3950	0.4990	0.6120	0.7390	0.9490	1.1590	1.4490	1.9990	2.8370	4.0670	5.6770	7.9931	9.9714
0.70	0.3960	0.5000	0.6130	0.7400	0.9500	1.1600	1.4500	2.0000	2.8380	4.0680	5.6780	7.9931	9.9714
0.75	0.3970	0.5010	0.6140	0.7410	0.9510	1.1610	1.4510	2.0010	2.8390	4.0690	5.6790	7.9931	9.9714
0.80	0.3980	0.5020	0.6150	0.7420	0.9520	1.1620	1.4520	2.0020	2.8400	4.0700	5.6800	7.9931	9.9714
0.85	0.3990	0.5030	0.6160	0.7430	0.9530	1.1630	1.4530	2.0030	2.8410	4.0710	5.6810	7.9931	9.9714
0.90	0.3990	0.5030	0.6160	0.7430	0.9530	1.1630	1.4530	2.0030	2.8410	4.0710	5.6810	7.9931	9.9714
0.95	0.3990	0.5030	0.6160	0.7430	0.9530	1.1630	1.4530	2.0030	2.8410	4.0710	5.6810	7.9931	9.9714
1.00	0.3990	0.5030	0.6160	0.7430	0.9530	1.1630	1.4530	2.0030	2.8410	4.0710	5.6810	7.9931	9.9714

表 2·4

 $\rho = 0.4$

$F(\xi, \eta, \eta)$	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	
0.001	0.6006	-1	0.7092	-1	0.8104	-2	0.9131	-2	0.9275	-2	0.9371	-2	0.9437	-2
0.002	0.6101	-2	0.7188	-2	0.8200	-2	0.9227	-2	0.9371	-2	0.9467	-2	0.9533	-2
0.003	0.6196	-2	0.7283	-2	0.8305	-2	0.9332	-2	0.9476	-2	0.9572	-2	0.9638	-2
0.004	0.6291	-2	0.7378	-2	0.8400	-2	0.9427	-2	0.9571	-2	0.9667	-2	0.9733	-2
0.005	0.6386	-2	0.7473	-2	0.8500	-2	0.9522	-2	0.9666	-2	0.9762	-2	0.9828	-2
0.006	0.6481	-2	0.7568	-2	0.8600	-2	0.9617	-2	0.9761	-2	0.9857	-2	0.9923	-2
0.007	0.6576	-2	0.7663	-2	0.8700	-2	0.9712	-2	0.9856	-2	0.9952	-2	1.0018	-2
0.008	0.6671	-2	0.7758	-2	0.8800	-2	0.9807	-2	0.9951	-2	1.0047	-2	1.0113	-2
0.009	0.6766	-2	0.7853	-2	0.8900	-2	0.9902	-2	1.0046	-2	1.0142	-2	1.0208	-2
0.010	0.6861	-2	0.7948	-2	0.9000	-2	1.0000	-2	1.0144	-2	1.0240	-2	1.0306	-2
0.011	0.6956	-2	0.8043	-2	0.9100	-2	1.0095	-2	1.0239	-2	1.0335	-2	1.0401	-2
0.012	0.7051	-2	0.8138	-2	0.9200	-2	1.0190	-2	1.0334	-2	1.0430	-2	1.0496	-2
0.013	0.7146	-2	0.8233	-2	0.9300	-2	1.0285	-2	1.0429	-2	1.0525	-2	1.0591	-2
0.014	0.7241	-2	0.8328	-2	0.9400	-2	1.0380	-2	1.0524	-2	1.0620	-2	1.0686	-2
0.015	0.7336	-2	0.8423	-2	0.9500	-2	1.0475	-2	1.0619	-2	1.0715	-2	1.0781	-2
0.016	0.7431	-2	0.8518	-2	0.9600	-2	1.0570	-2	1.0714	-2	1.0810	-2	1.0876	-2
0.017	0.7526	-2	0.8613	-2	0.9700	-2	1.0665	-2	1.0809	-2	1.0905	-2	1.0971	-2
0.018	0.7621	-2	0.8708	-2	0.9800	-2	1.0760	-2	1.0904	-2	1.1000	-2	1.1066	-2
0.019	0.7716	-2	0.8803	-2	0.9900	-2	1.0855	-2	1.1003	-2	1.1100	-2	1.1166	-2
0.020	0.7811	-2	0.8898	-2	1.0000	-2	1.0950	-2	1.1102	-2	1.1200	-2	1.1266	-2
0.021	0.7906	-2	0.8993	-2	1.0100	-2	1.1045	-2	1.1194	-2	1.1290	-2	1.1356	-2
0.022	0.8001	-2	0.9088	-2	1.0200	-2	1.1140	-2	1.1289	-2	1.1385	-2	1.1451	-2
0.023	0.8096	-2	0.9183	-2	1.0300	-2	1.1235	-2	1.1384	-2	1.1480	-2	1.1546	-2
0.024	0.8191	-2	0.9278	-2	1.0400	-2	1.1330	-2	1.1479	-2	1.1575	-2	1.1641	-2
0.025	0.8286	-2	0.9373	-2	1.0500	-2	1.1425	-2	1.1574	-2	1.1670	-2	1.1736	-2
0.026	0.8381	-2	0.9468	-2	1.0600	-2	1.1520	-2	1.1669	-2	1.1765	-2	1.1831	-2
0.027	0.8476	-2	0.9563	-2	1.0700	-2	1.1615	-2	1.1764	-2	1.1860	-2	1.1926	-2
0.028	0.8571	-2	0.9658	-2	1.0800	-2	1.1710	-2	1.1859	-2	1.1955	-2	1.2021	-2
0.029	0.8666	-2	0.9753	-2	1.0900	-2	1.1805	-2	1.1954	-2	1.2050	-2	1.2116	-2
0.030	0.8761	-2	0.9848	-2	1.1000	-2	1.1900	-2	1.2049	-2	1.2145	-2	1.2211	-2
0.031	0.8856	-2	0.9943	-2	1.1100	-2	1.2000	-2	1.2149	-2	1.2245	-2	1.2311	-2
0.032	0.8951	-2	1.0038	-2	1.1200	-2	1.2095	-2	1.2244	-2	1.2340	-2	1.2406	-2
0.033	0.9046	-2	1.0133	-2	1.1300	-2	1.2190	-2	1.2339	-2	1.2435	-2	1.2501	-2
0.034	0.9141	-2	1.0228	-2	1.1400	-2	1.2285	-2	1.2434	-2	1.2530	-2	1.2596	-2
0.035	0.9236	-2	1.0323	-2	1.1500	-2	1.2380	-2	1.2529	-2	1.2625	-2	1.2691	-2
0.036	0.9331	-2	1.0418	-2	1.1600	-2	1.2475	-2	1.2624	-2	1.2720	-2	1.2786	-2
0.037	0.9426	-2	1.0513	-2	1.1700	-2	1.2570	-2	1.2719	-2	1.2815	-2	1.2881	-2
0.038	0.9521	-2	1.0608	-2	1.1800	-2	1.2665	-2	1.2814	-2	1.2910	-2	1.2976	-2
0.039	0.9616	-2	1.0703	-2	1.1900	-2	1.2760	-2	1.2909	-2	1.3005	-2	1.3071	-2
0.040	0.9711	-2	1.0798	-2	1.2000	-2	1.2855	-2	1.3004	-2	1.3100	-2	1.3166	-2
0.041	0.9806	-2	1.0893	-2	1.2100	-2	1.2950	-2	1.3103	-2	1.3200	-2	1.3266	-2
0.042	0.9901	-2	1.0988	-2	1.2200	-2	1.3045	-2	1.3204	-2	1.3300	-2	1.3366	-2
0.043	0.9996	-2	1.1083	-2	1.2300	-2	1.3140	-2	1.3299	-2	1.3395	-2	1.3461	-2
0.044	1.0091	-2	1.1178	-2	1.2400	-2	1.3235	-2	1.3394	-2	1.3490	-2	1.3556	-2
0.045	1.0186	-2	1.1273	-2	1.2500	-2	1.3330	-2	1.3489	-2	1.3585	-2	1.3651	-2
0.046	1.0281	-2	1.1368	-2	1.2600	-2	1.3425	-2	1.3584	-2	1.3680	-2	1.3746	-2
0.047	1.0376	-2	1.1463	-2	1.2700	-2	1.3520	-2	1.3679	-2	1.3775	-2	1.3841	-2
0.048	1.0471	-2	1.1558	-2	1.2800	-2	1.3615	-2	1.3774	-2	1.3870	-2	1.3936	-2
0.049	1.0566	-2	1.1653	-2	1.2900	-2	1.3710	-2	1.3869	-2	1.3965	-2	1.4031	-2
0.050	1.0661	-2	1.1748	-2	1.3000	-2	1.3805	-2	1.3964	-2	1.4060	-2	1.4126	-2
0.051	1.0756	-2	1.1843	-2	1.3100	-2	1.3900	-2	1.4059	-2	1.4155	-2	1.4221	-2
0.052	1.0851	-2	1.1938	-2	1.3200	-2	1.4000	-2	1.4154	-2	1.4250	-2	1.4316	-2
0.053	1.0946	-2	1.2033	-2	1.3300	-2	1.4095	-2	1.4249	-2	1.4345	-2	1.4411	-2
0.054	1.1041	-2	1.2128	-2	1.3400	-2	1.4190	-2	1.4344	-2	1.4440	-2	1.4506	-2
0.055	1.1136	-2	1.2223	-2	1.3500	-2	1.4285	-2	1.4439	-2	1.4535	-2	1.4601	-2
0.056	1.1231	-2	1.2318	-2	1.3600	-2	1.4380	-2	1.4534	-2	1.4630	-2	1.4696	-2
0.057	1.1326	-2	1.2413	-2	1.3700	-2	1.4475	-2	1.4629	-2	1.4725	-2	1.4791	-2
0.058	1.1421	-2	1.2508	-2	1.3800	-2	1.4570	-2	1.4724	-2	1.4820	-2	1.4886	-2
0.059	1.1516	-2	1.2603	-2	1.3900	-2	1.4665	-2	1.4819	-2	1.4915	-2	1.4981	-2
0.060	1.1611	-2	1.2698	-2	1.4000	-2	1.4760	-2	1.4914	-2	1.5010	-2	1.5076	-2
0.061	1.1706	-2	1.2793	-2	1.4100	-2	1.4855	-2	1.5009	-2	1.5105	-2	1.5171	-2
0.062	1.1801	-2	1.2888	-2	1.4200	-2	1.4950	-2	1.5104	-2	1.5200	-2	1.5266	-2
0.063	1.1896	-2	1.2983	-2	1.4300	-2	1.5045	-2	1.5203	-2	1.5300	-2	1.5366	-2
0.064	1.1991	-2	1.3078	-2	1.4400	-2	1.5140	-2	1.5302	-2	1.5400	-2	1.5466	-2
0.065	1.2086	-2	1.3173	-2	1.4500	-2	1.5235	-2	1.5401	-2	1.5500	-2	1.5566	-2
0.066	1.2181	-2	1.3268	-2	1.4600	-2	1.5330	-2	1.5500	-2	1.5600	-2	1.5666	-2
0.067	1.2276	-2	1.3363	-2	1.4700	-2	1.5425	-2	1.5601	-2	1.5700	-2	1.5766	-2
0.068	1.2371	-2	1.3458	-2	1.4800	-2	1.5520	-2	1.5702	-2	1.5800	-2	1.5866	-2
0.069	1.2466	-2	1.3553	-2	1.4900	-2	1.5615	-2	1.5803	-2	1.5900	-2	1.5966	-2
0.070	1.2561	-2	1.3648	-2	1.5000	-2	1.5710	-2	1.5904	-2	1.6000	-2	1.6066	-2
0.071	1.2656	-2	1.3743	-2	1.5100	-2	1.5805	-2	1.6005	-2	1.6100	-2	1.6166	-2
0.072	1.2751	-2	1.3838	-2	1.5200	-2	1.5900	-2	1.6106	-2	1.6200	-2	1.6266	-2
0.073	1.2846	-2	1.3933	-2	1.5300	-2	1.6000	-2	1.6207	-2	1.6300	-2	1.6366	-2
0.074	1.2941	-2	1.4028	-2	1.5400	-2	1.6095	-2	1.6308	-2	1.6400	-2	1.6466	-2
0.075	1.3036	-2	1.4123	-2	1.5500	-2	1.6190	-2	1.6409	-2	1.6500	-2	1.6566	-2
0.076	1.3131	-2	1.4218	-2	1.5600	-2	1.6285	-2	1.6510	-2	1.6600	-2	1.6666	-2
0.077	1.3226	-2	1.4313	-2	1.5700	-2	1.6380	-2	1.6611	-2	1.6700	-2	1.6766	-2
0.078	1.3321	-2	1.4408	-2	1.5800	-2	1.6475	-2	1.6712	-2	1.6800	-2	1.6866	-2
0.079	1.3416	-2	1.4503	-2	1.5900	-2	1.6570	-2	1.6813	-2	1.6900	-2	1.6966	-2
0.080	1.3511	-2	1.4598	-2	1.6000	-2	1.6665	-2	1.6914	-2	1.7000	-2	1.7066	-2
0.081	1.3606	-2	1.4693	-2	1.6100	-2	1.6760	-2	1.7015	-2	1.7100	-2	1.7166	-2
0.082	1.3701	-2	1.4788	-2	1.6200	-2	1.6855	-2	1.7116	-2	1.7200	-2	1.7266	-2
0.083	1.3796	-2	1.4883	-2	1.6300	-2	1.6950	-2	1.7217	-2	1.7300	-2	1.7366	-2
0.084	1.3891	-2	1.4978	-2	1.6400	-2	1.7045	-2	1.7318	-2	1.7400	-2	1.7466	-2
0.085	1.3986	-2	1.5073	-2	1.6500	-2	1.7140	-2	1.7419	-2	1.7500	-2	1.7566	-2
0.086	1.4081	-2	1.5168	-2	1.6600	-2	1.7235	-2	1.7520	-2	1.7600	-2	1.7666	-2
0.087	1.4176	-2	1.5263	-2	1.6700	-2	1.7330	-2	1.7621	-2	1.7700	-2	1.7766	-2
0.088	1.4271	-2	1.5358	-2	1.6800	-2	1.7425	-2	1.7722	-2	1.7800	-2	1.7866	-2
0.089	1.4366	-2	1.5453	-2	1.6900	-2	1.7520	-2	1.7823	-2	1.7900	-2	1.7966	-2
0.090	1.4461	-2	1.5548	-2	1.7000	-2	1.7615	-2	1.7924	-2	1.8000	-2	1.8066	-2
0.091	1.4556	-2	1.5643	-2	1.7100	-2	1.7710	-2						

F	E	η	1.5	4.0	4.5	7.0	9.0	10.0	12.0	14.0	16.0	18.0
0.001	0.0147	-	0.0138	0.0118	0.1192	0.0100	0.0144	0.0151	0.0157	0.0161	0.0163	0.0164
0.002	0.0151	-	0.0141	0.0121	0.1200	0.0104	0.0148	0.0155	0.0161	0.0165	0.0167	0.0168
0.003	0.0155	-	0.0145	0.0125	0.1208	0.0108	0.0152	0.0159	0.0165	0.0169	0.0171	0.0172
0.004	0.0159	-	0.0149	0.0129	0.1216	0.0112	0.0156	0.0163	0.0169	0.0173	0.0175	0.0176
0.005	0.0163	-	0.0153	0.0133	0.1224	0.0116	0.0160	0.0167	0.0173	0.0177	0.0179	0.0180
0.006	0.0167	-	0.0157	0.0137	0.1232	0.0120	0.0164	0.0171	0.0177	0.0181	0.0183	0.0184
0.007	0.0171	-	0.0161	0.0141	0.1240	0.0124	0.0168	0.0175	0.0181	0.0185	0.0187	0.0188
0.008	0.0175	-	0.0165	0.0145	0.1248	0.0128	0.0172	0.0179	0.0185	0.0189	0.0191	0.0192
0.009	0.0179	-	0.0169	0.0149	0.1256	0.0132	0.0176	0.0183	0.0189	0.0193	0.0195	0.0196
0.010	0.0183	-	0.0173	0.0153	0.1264	0.0136	0.0180	0.0187	0.0193	0.0197	0.0199	0.0200
0.011	0.0187	-	0.0177	0.0157	0.1272	0.0140	0.0184	0.0191	0.0197	0.0201	0.0203	0.0204
0.012	0.0191	-	0.0181	0.0161	0.1280	0.0144	0.0188	0.0195	0.0201	0.0205	0.0207	0.0208
0.013	0.0195	-	0.0185	0.0165	0.1288	0.0148	0.0192	0.0199	0.0205	0.0209	0.0211	0.0212
0.014	0.0199	-	0.0189	0.0169	0.1296	0.0152	0.0196	0.0203	0.0209	0.0213	0.0215	0.0216
0.015	0.0203	-	0.0193	0.0173	0.1304	0.0156	0.0200	0.0207	0.0213	0.0217	0.0219	0.0220
0.016	0.0207	-	0.0197	0.0177	0.1312	0.0160	0.0204	0.0211	0.0217	0.0221	0.0223	0.0224
0.017	0.0211	-	0.0201	0.0181	0.1320	0.0164	0.0208	0.0215	0.0221	0.0225	0.0227	0.0228
0.018	0.0215	-	0.0205	0.0185	0.1328	0.0168	0.0212	0.0219	0.0225	0.0229	0.0231	0.0232
0.019	0.0219	-	0.0209	0.0189	0.1336	0.0172	0.0216	0.0223	0.0229	0.0233	0.0235	0.0236
0.020	0.0223	-	0.0213	0.0193	0.1344	0.0176	0.0220	0.0227	0.0233	0.0237	0.0239	0.0240
0.021	0.0227	-	0.0217	0.0197	0.1352	0.0180	0.0224	0.0231	0.0237	0.0241	0.0243	0.0244
0.022	0.0231	-	0.0221	0.0201	0.1360	0.0184	0.0228	0.0235	0.0241	0.0245	0.0247	0.0248
0.023	0.0235	-	0.0225	0.0205	0.1368	0.0188	0.0232	0.0239	0.0245	0.0249	0.0251	0.0252
0.024	0.0239	-	0.0229	0.0209	0.1376	0.0192	0.0236	0.0243	0.0249	0.0253	0.0255	0.0256
0.025	0.0243	-	0.0233	0.0213	0.1384	0.0196	0.0240	0.0247	0.0253	0.0257	0.0259	0.0260
0.026	0.0247	-	0.0237	0.0217	0.1392	0.0200	0.0244	0.0251	0.0257	0.0261	0.0263	0.0264
0.027	0.0251	-	0.0241	0.0221	0.1400	0.0204	0.0248	0.0255	0.0261	0.0265	0.0267	0.0268
0.028	0.0255	-	0.0245	0.0225	0.1408	0.0208	0.0252	0.0259	0.0265	0.0269	0.0271	0.0272
0.029	0.0259	-	0.0249	0.0229	0.1416	0.0212	0.0256	0.0263	0.0269	0.0273	0.0275	0.0276
0.030	0.0263	-	0.0253	0.0233	0.1424	0.0216	0.0260	0.0267	0.0273	0.0277	0.0279	0.0280
0.031	0.0267	-	0.0257	0.0237	0.1432	0.0220	0.0264	0.0271	0.0277	0.0281	0.0283	0.0284
0.032	0.0271	-	0.0261	0.0241	0.1440	0.0224	0.0268	0.0275	0.0281	0.0285	0.0287	0.0288
0.033	0.0275	-	0.0265	0.0245	0.1448	0.0228	0.0272	0.0279	0.0285	0.0289	0.0291	0.0292
0.034	0.0279	-	0.0269	0.0249	0.1456	0.0232	0.0276	0.0283	0.0289	0.0293	0.0295	0.0296
0.035	0.0283	-	0.0273	0.0253	0.1464	0.0236	0.0280	0.0287	0.0293	0.0297	0.0299	0.0300
0.036	0.0287	-	0.0277	0.0257	0.1472	0.0240	0.0284	0.0291	0.0297	0.0301	0.0303	0.0304
0.037	0.0291	-	0.0281	0.0261	0.1480	0.0244	0.0288	0.0295	0.0301	0.0305	0.0307	0.0308
0.038	0.0295	-	0.0285	0.0265	0.1488	0.0248	0.0292	0.0299	0.0305	0.0309	0.0311	0.0312
0.039	0.0299	-	0.0289	0.0269	0.1496	0.0252	0.0296	0.0303	0.0309	0.0313	0.0315	0.0316
0.040	0.0303	-	0.0293	0.0273	0.1504	0.0256	0.0300	0.0307	0.0313	0.0317	0.0319	0.0320
0.041	0.0307	-	0.0297	0.0277	0.1512	0.0260	0.0304	0.0311	0.0317	0.0321	0.0323	0.0324
0.042	0.0311	-	0.0301	0.0281	0.1520	0.0264	0.0308	0.0315	0.0321	0.0325	0.0327	0.0328
0.043	0.0315	-	0.0305	0.0285	0.1528	0.0268	0.0312	0.0319	0.0325	0.0329	0.0331	0.0332
0.044	0.0319	-	0.0309	0.0289	0.1536	0.0272	0.0316	0.0323	0.0329	0.0333	0.0335	0.0336
0.045	0.0323	-	0.0313	0.0293	0.1544	0.0276	0.0320	0.0327	0.0333	0.0337	0.0339	0.0340
0.046	0.0327	-	0.0317	0.0297	0.1552	0.0280	0.0324	0.0331	0.0337	0.0341	0.0343	0.0344
0.047	0.0331	-	0.0321	0.0301	0.1560	0.0284	0.0328	0.0335	0.0341	0.0345	0.0347	0.0348
0.048	0.0335	-	0.0325	0.0305	0.1568	0.0288	0.0332	0.0339	0.0345	0.0349	0.0351	0.0352
0.049	0.0339	-	0.0329	0.0309	0.1576	0.0292	0.0336	0.0343	0.0349	0.0353	0.0355	0.0356
0.050	0.0343	-	0.0333	0.0313	0.1584	0.0296	0.0340	0.0347	0.0353	0.0357	0.0359	0.0360
0.051	0.0347	-	0.0337	0.0317	0.1592	0.0300	0.0344	0.0351	0.0357	0.0361	0.0363	0.0364
0.052	0.0351	-	0.0341	0.0321	0.1600	0.0304	0.0348	0.0355	0.0361	0.0365	0.0367	0.0368
0.053	0.0355	-	0.0345	0.0325	0.1608	0.0308	0.0352	0.0359	0.0365	0.0369	0.0371	0.0372
0.054	0.0359	-	0.0349	0.0329	0.1616	0.0312	0.0356	0.0363	0.0369	0.0373	0.0375	0.0376
0.055	0.0363	-	0.0353	0.0333	0.1624	0.0316	0.0360	0.0367	0.0373	0.0377	0.0379	0.0380
0.056	0.0367	-	0.0357	0.0337	0.1632	0.0320	0.0364	0.0371	0.0377	0.0381	0.0383	0.0384
0.057	0.0371	-	0.0361	0.0341	0.1640	0.0324	0.0368	0.0375	0.0381	0.0385	0.0387	0.0388
0.058	0.0375	-	0.0365	0.0345	0.1648	0.0328	0.0372	0.0379	0.0385	0.0389	0.0391	0.0392
0.059	0.0379	-	0.0369	0.0349	0.1656	0.0332	0.0376	0.0383	0.0389	0.0393	0.0395	0.0396
0.060	0.0383	-	0.0373	0.0353	0.1664	0.0336	0.0380	0.0387	0.0393	0.0397	0.0399	0.0400
0.061	0.0387	-	0.0377	0.0357	0.1672	0.0340	0.0384	0.0391	0.0397	0.0401	0.0403	0.0404
0.062	0.0391	-	0.0381	0.0361	0.1680	0.0344	0.0388	0.0395	0.0401	0.0405	0.0407	0.0408
0.063	0.0395	-	0.0385	0.0365	0.1688	0.0348	0.0392	0.0399	0.0405	0.0409	0.0411	0.0412
0.064	0.0399	-	0.0389	0.0369	0.1696	0.0352	0.0396	0.0403	0.0409	0.0413	0.0415	0.0416
0.065	0.0403	-	0.0393	0.0373	0.1704	0.0356	0.0400	0.0407	0.0413	0.0417	0.0419	0.0420
0.066	0.0407	-	0.0397	0.0377	0.1712	0.0360	0.0404	0.0411	0.0417	0.0421	0.0423	0.0424
0.067	0.0411	-	0.0401	0.0381	0.1720	0.0364	0.0408	0.0415	0.0421	0.0425	0.0427	0.0428
0.068	0.0415	-	0.0405	0.0385	0.1728	0.0368	0.0412	0.0419	0.0425	0.0429	0.0431	0.0432
0.069	0.0419	-	0.0409	0.0389	0.1736	0.0372	0.0416	0.0423	0.0429	0.0433	0.0435	0.0436
0.070	0.0423	-	0.0413	0.0393	0.1744	0.0376	0.0420	0.0427	0.0433	0.0437	0.0439	0.0440
0.071	0.0427	-	0.0417	0.0397	0.1752	0.0380	0.0424	0.0431	0.0437	0.0441	0.0443	0.0444
0.072	0.0431	-	0.0421	0.0401	0.1760	0.0384	0.0428	0.0435	0.0441	0.0445	0.0447	0.0448
0.073	0.0435	-	0.0425	0.0405	0.1768	0.0388	0.0432	0.0439	0.0445	0.0449	0.0451	0.0452
0.074	0.0439	-	0.0429	0.0409	0.1776	0.0392	0.0436	0.0443	0.0449	0.0453	0.0455	0.0456
0.075	0.0443	-	0.0433	0.0413	0.1784	0.0396	0.0440	0.0447	0.0453	0.0457	0.0459	0.0460
0.076	0.0447	-	0.0437	0.0417	0.1792	0.0400	0.0444	0.0451	0.0457	0.0461	0.0463	0.0464
0.077	0.0451	-	0.0441	0.0421	0.1800	0.0404	0.0448	0.0455	0.0461	0.0465	0.0467	0.0468
0.078	0.0455	-	0.0445	0.0425	0.1808	0.0408	0.0452	0.0459	0.0465	0.0469	0.0471	0.0472
0.079	0.0459	-	0.0449	0.0429	0.1816	0.0412	0.0456	0.0463	0.0469	0.0473	0.0475	0.0476
0.080	0.0463	-	0.0453	0.0433	0.1824	0.0416	0.0460	0.0467	0.0473	0.0477	0.0479	0.0480
0.081	0.0467	-	0.0457	0.0437	0.1832	0.0420	0.0464	0.0471	0.0477	0.0481	0.0483	0.0484
0.082	0.0471	-	0.0461	0.0441	0.1840	0.0424	0.0468	0.0475	0.0481	0.0485	0.0487	0.0488
0.083	0.0475	-	0.0465	0.0445	0.1848	0.0428	0.0472	0.0479	0.0485	0.0489	0.0491	0.0492
0.084	0.0479	-	0.0469	0.0449	0.1856	0.0432	0.0476	0.0483	0.0489	0.0493	0.0495	0.0496
0.085	0.0483	-	0.0473	0.0453	0.1864	0.0436	0.0480	0.0487	0.0493	0.0497	0.0499	0.0500
0.086	0.0487	-	0.0477	0.0457	0.1872	0.0440	0.0484	0.0491	0.0497	0.0501	0.0503	0.0504
0.087	0.0491	-	0.0481	0.0461	0.1880	0.0444	0.0488	0.0495	0.0501	0.		

表 2.5 $\rho = 0.5$

$F, \varepsilon, \eta, \gamma$	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.001	0.1005 -3	0.6423 -3	0.8247 -3	0.1098 -2	0.1358 -2	0.1744 -2	0.2238 -2	0.2871 -2	0.3681 -2	0.4718 -2	0.6037 -2	0.7717 -2	0.9809 -2
0.002	0.1001 -2	0.1829 -2	0.2718 -2	0.3718 -2	0.4872 -2	0.6147 -2	0.7582 -2	0.9222 -2	0.1106 -1	0.1358 -1	0.1671 -1	0.2058 -1	0.2514 -1
0.003	0.1004 -2	0.2004 -2	0.2973 -2	0.4130 -2	0.5417 -2	0.6869 -2	0.8542 -2	0.1041 -1	0.1293 -1	0.1606 -1	0.2000 -1	0.2475 -1	0.3034 -1
0.005	0.2006 -2	0.3218 -2	0.4310 -2	0.5360 -2	0.6796 -2	0.8707 -2	0.1114 -1	0.1424 -1	0.1870 -1	0.2366 -1	0.2919 -1	0.3677 -1	0.4602 -1
0.007	0.3005 -2	0.4658 -2	0.6061 -2	0.7622 -2	0.9544 -2	0.1218 -1	0.1557 -1	0.1985 -1	0.2524 -1	0.3195 -1	0.4006 -1	0.5037 -1	0.6296 -1
0.008	0.4016 -2	0.5766 -2	0.7447 -2	0.9459 -2	0.1223 -1	0.1565 -1	0.1997 -1	0.2544 -1	0.3244 -1	0.4034 -1	0.5000 -1	0.6202 -1	0.7692 -1
0.010	0.5025 -2	0.6878 -2	0.9041 -2	0.1081 -1	0.1359 -1	0.1738 -1	0.2237 -1	0.2816 -1	0.3570 -1	0.4467 -1	0.5500 -1	0.6847 -1	0.8590 -1
0.012	0.6034 -2	0.8100 -2	0.1097 -1	0.1693 -1	0.2119 -1	0.2681 -1	0.3390 -1	0.4261 -1	0.5312 -1	0.6564 -1	0.8030 -1	0.9814 -1	0.1194 -0
0.014	0.7043 -2	0.9322 -2	0.1207 -1	0.1893 -1	0.2421 -1	0.3083 -1	0.3890 -1	0.4941 -1	0.6193 -1	0.7664 -1	0.9450 -1	0.1154 -0	0.1545 -0
0.016	0.8052 -2	0.1050 -1	0.1397 -1	0.2087 -1	0.2715 -1	0.3483 -1	0.4400 -1	0.5571 -1	0.6996 -1	0.8780 -1	0.1077 -0	0.1468 -0	0.1870 -0
0.018	0.9061 -2	0.1259 -1	0.1606 -1	0.2297 -1	0.2925 -1	0.3793 -1	0.4810 -1	0.6081 -1	0.7616 -1	0.9420 -1	0.1139 -0	0.1530 -0	0.1940 -0
0.020	0.1007 -0	0.1468 -1	0.1815 -1	0.2403 -1	0.2931 -1	0.3799 -1	0.4816 -1	0.6087 -1	0.7622 -1	0.9426 -1	0.1141 -0	0.1532 -0	0.1942 -0
0.022	0.1208 -1	0.1669 -1	0.2016 -1	0.2604 -1	0.3132 -1	0.3999 -1	0.5016 -1	0.6287 -1	0.7822 -1	0.9626 -1	0.1143 -0	0.1534 -0	0.1944 -0
0.024	0.1409 -1	0.1870 -1	0.2217 -1	0.2805 -1	0.3333 -1	0.4200 -1	0.5217 -1	0.6488 -1	0.8023 -1	0.9827 -1	0.1145 -0	0.1536 -0	0.1946 -0
0.026	0.1610 -1	0.2071 -1	0.2418 -1	0.2906 -1	0.3434 -1	0.4301 -1	0.5318 -1	0.6589 -1	0.8124 -1	0.9928 -1	0.1147 -0	0.1538 -0	0.1948 -0
0.028	0.1811 -1	0.2272 -1	0.2619 -1	0.3107 -1	0.3635 -1	0.4502 -1	0.5519 -1	0.6790 -1	0.8325 -1	0.1000 -0	0.1391 -0	0.1782 -0	0.2173 -0
0.030	0.2012 -1	0.2473 -1	0.2820 -1	0.3308 -1	0.3836 -1	0.4703 -1	0.5720 -1	0.7091 -1	0.8626 -1	0.1002 -0	0.1393 -0	0.1784 -0	0.2175 -0
0.032	0.2213 -1	0.2674 -1	0.3021 -1	0.3509 -1	0.4037 -1	0.4904 -1	0.5921 -1	0.7292 -1	0.8827 -1	0.1004 -0	0.1395 -0	0.1786 -0	0.2177 -0
0.034	0.2414 -1	0.2875 -1	0.3222 -1	0.3710 -1	0.4238 -1	0.5105 -1	0.6122 -1	0.7493 -1	0.9028 -1	0.1006 -0	0.1397 -0	0.1788 -0	0.2179 -0
0.036	0.2615 -1	0.3076 -1	0.3423 -1	0.3911 -1	0.4439 -1	0.5306 -1	0.6323 -1	0.7694 -1	0.9229 -1	0.1008 -0	0.1399 -0	0.1790 -0	0.2181 -0
0.038	0.2816 -1	0.3277 -1	0.3624 -1	0.4112 -1	0.4640 -1	0.5507 -1	0.6524 -1	0.7895 -1	0.9400 -1	0.1010 -0	0.1401 -0	0.1792 -0	0.2183 -0
0.040	0.3017 -1	0.3478 -1	0.3825 -1	0.4313 -1	0.4841 -1	0.5708 -1	0.6725 -1	0.8096 -1	0.9601 -1	0.1012 -0	0.1403 -0	0.1794 -0	0.2185 -0
0.042	0.3218 -1	0.3679 -1	0.4026 -1	0.4512 -1	0.5040 -1	0.5907 -1	0.6924 -1	0.8295 -1	0.9796 -1	0.1014 -0	0.1405 -0	0.1796 -0	0.2187 -0
0.044	0.3419 -1	0.3880 -1	0.4227 -1	0.4713 -1	0.5241 -1	0.6108 -1	0.7125 -1	0.8496 -1	0.9897 -1	0.1016 -0	0.1407 -0	0.1798 -0	0.2189 -0
0.046	0.3620 -1	0.4081 -1	0.4429 -1	0.4915 -1	0.5443 -1	0.6310 -1	0.7327 -1	0.8698 -1	0.1018 -0	0.1409 -0	0.1800 -0	0.2190 -0	0.2191 -0
0.048	0.3821 -1	0.4282 -1	0.4630 -1	0.5116 -1	0.5644 -1	0.6511 -1	0.7528 -1	0.8899 -1	0.1020 -0	0.1411 -0	0.1802 -0	0.2192 -0	0.2193 -0
0.050	0.4022 -1	0.4483 -1	0.4831 -1	0.5317 -1	0.5845 -1	0.6712 -1	0.7729 -1	0.9099 -1	0.1022 -0	0.1413 -0	0.1804 -0	0.2194 -0	0.2195 -0
0.052	0.4223 -1	0.4684 -1	0.5032 -1	0.5518 -1	0.6046 -1	0.6913 -1	0.7930 -1	0.9300 -1	0.1024 -0	0.1415 -0	0.1806 -0	0.2196 -0	0.2197 -0
0.054	0.4424 -1	0.4885 -1	0.5233 -1	0.5719 -1	0.6247 -1	0.7114 -1	0.8131 -1	0.9441 -1	0.1026 -0	0.1417 -0	0.1808 -0	0.2198 -0	0.2199 -0
0.056	0.4625 -1	0.5086 -1	0.5434 -1	0.5920 -1	0.6448 -1	0.7315 -1	0.8332 -1	0.9472 -1	0.1028 -0	0.1419 -0	0.1810 -0	0.2200 -0	0.2201 -0
0.058	0.4826 -1	0.5287 -1	0.5635 -1	0.6121 -1	0.6649 -1	0.7516 -1	0.8533 -1	0.9663 -1	0.1030 -0	0.1421 -0	0.1812 -0	0.2202 -0	0.2203 -0
0.060	0.5027 -1	0.5488 -1	0.5836 -1	0.6322 -1	0.6850 -1	0.7717 -1	0.8734 -1	0.9864 -1	0.1032 -0	0.1423 -0	0.1814 -0	0.2204 -0	0.2205 -0
0.062	0.5228 -1	0.5689 -1	0.6037 -1	0.6523 -1	0.7051 -1	0.7918 -1	0.8935 -1	0.1000 -0	0.1425 -0	0.1816 -0	0.2206 -0	0.2207 -0	0.2208 -0
0.064	0.5429 -1	0.5890 -1	0.6238 -1	0.6724 -1	0.7252 -1	0.8119 -1	0.9136 -1	0.1002 -0	0.1427 -0	0.1818 -0	0.2208 -0	0.2209 -0	0.2210 -0
0.066	0.5630 -1	0.6091 -1	0.6439 -1	0.6925 -1	0.7453 -1	0.8320 -1	0.9337 -1	0.1004 -0	0.1429 -0	0.1820 -0	0.2210 -0	0.2211 -0	0.2212 -0
0.068	0.5831 -1	0.6292 -1	0.6640 -1	0.7126 -1	0.7654 -1	0.8521 -1	0.9528 -1	0.1006 -0	0.1431 -0	0.1822 -0	0.2212 -0	0.2213 -0	0.2214 -0
0.070	0.6032 -1	0.6493 -1	0.6841 -1	0.7327 -1	0.7855 -1	0.8722 -1	0.9719 -1	0.1008 -0	0.1433 -0	0.1824 -0	0.2214 -0	0.2215 -0	0.2216 -0
0.072	0.6233 -1	0.6694 -1	0.7042 -1	0.7543 -1	0.8071 -1	0.8938 -1	0.9935 -1	0.1010 -0	0.1435 -0	0.1826 -0	0.2216 -0	0.2217 -0	0.2218 -0
0.074	0.6434 -1	0.6895 -1	0.7243 -1	0.7764 -1	0.8292 -1	0.9159 -1	0.1012 -0	0.1437 -0	0.1828 -0	0.2218 -0	0.2218 -0	0.2219 -0	0.2220 -0
0.076	0.6635 -1	0.7096 -1	0.7444 -1	0.7965 -1	0.8493 -1	0.9360 -1	0.1014 -0	0.1439 -0	0.1830 -0	0.2220 -0	0.2220 -0	0.2221 -0	0.2222 -0
0.078	0.6836 -1	0.7297 -1	0.7645 -1	0.8166 -1	0.8694 -1	0.9561 -1	0.1016 -0	0.1441 -0	0.1832 -0	0.2222 -0	0.2222 -0	0.2223 -0	0.2224 -0
0.080	0.7037 -1	0.7498 -1	0.7846 -1	0.8367 -1	0.8895 -1	0.9762 -1	0.1018 -0	0.1443 -0	0.1834 -0	0.2224 -0	0.2224 -0	0.2225 -0	0.2226 -0
0.082	0.7238 -1	0.7699 -1	0.8047 -1	0.8568 -1	0.9096 -1	0.9963 -1	0.1020 -0	0.1445 -0	0.1836 -0	0.2226 -0	0.2226 -0	0.2227 -0	0.2228 -0
0.084	0.7439 -1	0.7900 -1	0.8248 -1	0.8769 -1	0.9297 -1	0.1000 -0	0.1447 -0	0.1838 -0	0.2228 -0	0.2228 -0	0.2228 -0	0.2229 -0	0.2230 -0
0.086	0.7640 -1	0.8101 -1	0.8449 -1	0.8970 -1	0.9500 -1	0.1002 -0	0.1449 -0	0.1840 -0	0.2230 -0	0.2230 -0	0.2230 -0	0.2231 -0	0.2232 -0
0.088	0.7841 -1	0.8302 -1	0.8650 -1	0.9171 -1	0.9681 -1	0.1004 -0	0.1451 -0	0.1842 -0	0.2232 -0	0.2232 -0	0.2232 -0	0.2233 -0	0.2234 -0
0.090	0.8042 -1	0.8503 -1	0.8851 -1	0.9372 -1	0.9882 -1	0.1006 -0	0.1453 -0	0.1844 -0	0.2234 -0	0.2234 -0	0.2234 -0	0.2235 -0	0.2236 -0
0.092	0.8243 -1	0.8704 -1	0.9052 -1	0.9573 -1	1.0083 -1	0.1008 -0	0.1455 -0	0.1846 -0	0.2236 -0	0.2236 -0	0.2236 -0	0.2237 -0	0.2238 -0
0.094	0.8444 -1	0.8905 -1	0.9253 -1	0.9774 -1	1.0284 -1	0.1010 -0	0.1457 -0	0.1848 -0	0.2238 -0	0.2238 -0	0.2238 -0	0.2239 -0	0.2240 -0
0.096	0.8645 -1	0.9106 -1	0.9454 -1	0.9975 -1	1.0485 -1	0.1012 -0	0.1459 -0	0.1850 -0	0.2240 -0	0.2240 -0	0.2240 -0	0.2241 -0	0.2242 -0
0.098	0.8846 -1	0.9307 -1	0.9655 -1	1.0176 -1	1.0686 -1	0.1014 -0	0.1461 -0	0.1852 -0	0.2242 -0	0.2242 -0	0.2242 -0	0.2243 -0	0.2244 -0
0.100	0.9047 -1	0.9508 -1	0.9856 -1	1.0377 -1	1.0887 -1	0.1016 -0	0.1463 -0	0.1854 -0	0.2244 -0	0.2244 -0	0.2244 -0	0.2245 -0	0.2246 -0
0.102	0.9248 -1	0.9709 -1	1.0057 -1	1.0578 -1	1.1088 -1	0.1018 -0	0.1465 -0	0.1856 -0	0.2246 -0	0.2246 -0	0.2246 -0	0.2247 -0	0.2248 -0
0.104	0.9449 -1	0.9910 -1	1.0258 -1	1.0779 -1	1.1289 -1	0.1020 -0	0.1467 -0	0.1858 -0	0.2248 -0	0.2248 -0	0.2248 -0	0.2249 -0	0.2250 -0
0.106	0.9650 -1	1.0111 -1	1.0459 -1	1.0980 -1	1.1490 -1	0.1022 -0	0.1469 -0	0.1860 -0	0.2250 -0	0.2250 -0	0.2250 -0	0.2251 -0	0.2252 -0
0.108	0.9851 -1	1.0312 -1	1.0660 -1	1.1181 -1	1.1691 -1	0.1024 -0	0.1471 -0	0.1862 -0	0.2252 -0	0.2252 -0	0.2252 -0	0.2253 -0	0.2254 -0
0.110	1.0052 -1	1.0513 -1	1.0861 -1	1.1382 -1	1.1892 -1	0.1026 -0	0.1473 -0	0.1864 -0	0.2254 -0	0.2254 -0	0.2254 -0	0.2255 -0	0.2256 -0
0.112	1.0253 -1	1.0714 -1	1.1062 -1	1.1583 -1	1.2093 -1	0.1028 -0	0.1475 -0	0.1866 -0	0.2256 -0	0.2256 -0	0.2256 -0	0.2257 -0	0.2258 -0
0.114	1.0454 -1	1.0915 -1	1.1263 -1	1.1784 -1	1.2294 -1	0.1030 -0	0.1477 -0	0.1868 -0	0.2258 -0	0.2258 -0	0.2258 -0	0.2259 -0	0.2260 -0
0.116	1.0655 -1	1.1116 -1	1.1464 -1	1.1985 -1	1.2495 -1	0.1032 -0	0.1479 -0	0.1870 -0	0.2260 -0	0.2260 -0	0.2260 -0	0.2261 -0	0.2262 -0
0.118	1.0856 -1	1.1317 -1	1.1665 -1	1.2186 -1	1.2696 -1	0.1034 -0	0.1481 -0	0.1872 -0	0.2262 -0	0.2262 -0	0.2262 -0	0.2263 -0	0.2264 -0
0.120	1.1057 -1	1.1518 -1	1.1866 -1	1.2387 -1	1.2897 -1	0.1036 -0	0.1483 -0	0.1874 -0	0.2264 -0	0.2264 -0	0.2264 -0	0.2265 -0	0.2266 -0
0.122	1.1258 -1	1.1719 -1	1.2067 -1	1.2588 -1	1.3098 -1	0.1038 -0	0.1485 -0	0.1876 -0	0.2266 -0	0.2266 -0	0.2266 -0	0.2267 -0	0.2268 -0
0.124	1.1459 -1	1.1920 -1	1.2268 -1	1.2789 -1	1.3299 -1	0.1040 -0	0.1487 -0	0.1878 -0	0.2268 -0	0.2268 -0	0.2268 -0	0.2269 -0	0.2270 -0
0.126	1.1660 -1	1.2121 -1	1.2469 -1	1.2990 -1	1.3500 -1	0.1042 -0	0.1489 -0	0.1880 -0	0.2270 -0	0.2270 -0	0.2270 -0	0.2271 -0	0.2272 -0
0.128	1.1861 -1	1.2322 -1	1.2670 -1	1.3191 -1	1.3701 -1	0.1044 -0	0.1491 -0	0.1882 -0	0.2272 -0	0			

- 209 -

$\rho = 0.6$

- 210 -

- 211 -

表 2·7 $\rho = 0.7$

η	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.001	0.3001	-0.1	0.1378	-0.2	0.1733	-0.2	0.1649	-0.2	0.1594	-0.2	0.1528	-0.1	0.1481
0.002	0.6006	-0.3	0.3018	-0.2	0.3428	-0.2	0.3105	-0.2	0.2854	-0.2	0.2611	-0.1	0.2377
0.003	0.9012	-0.5	0.4515	-0.3	0.5146	-0.2	0.4508	-0.2	0.3951	-0.2	0.3394	-0.1	0.2840
0.004	1.2018	-0.7	0.6022	-0.4	0.6765	-0.3	0.6025	-0.2	0.5268	-0.2	0.4511	-0.1	0.3751
0.005	1.5024	-0.9	0.7529	-0.5	0.8272	-0.4	0.7529	-0.3	0.6765	-0.2	0.5998	-0.1	0.5262
0.006	1.8030	-1.2	0.9035	-0.7	0.9779	-0.5	0.9035	-0.4	0.8272	-0.3	0.7529	-0.2	0.6765
0.007	2.1037	-1.5	1.0542	-0.9	1.1286	-0.7	1.0542	-0.6	0.9779	-0.5	0.9035	-0.4	0.8272
0.008	2.4043	-1.8	1.2049	-1.2	1.2793	-0.9	1.2049	-0.8	1.1286	-0.7	1.0542	-0.6	0.9779
0.009	2.7049	-2.1	1.3556	-1.5	1.4299	-1.2	1.3556	-1.0	1.2793	-0.9	1.2049	-0.8	1.1286
0.010	3.0055	-2.4	1.5063	-1.8	1.5806	-1.5	1.5063	-1.2	1.4299	-1.0	1.3556	-0.9	1.2793
0.011	3.3061	-2.7	1.6570	-2.1	1.7313	-1.8	1.6570	-1.5	1.5806	-1.2	1.5063	-1.0	1.4299
0.012	3.6067	-3.0	1.8077	-2.4	1.8820	-2.1	1.8077	-1.8	1.7313	-1.5	1.6570	-1.2	1.5806
0.013	3.9073	-3.3	1.9584	-2.7	2.0327	-2.4	1.9584	-2.1	1.8820	-1.8	1.8077	-1.5	1.7313
0.014	4.2079	-3.6	2.1091	-3.0	2.1834	-2.7	2.1091	-2.4	2.0327	-2.1	1.9584	-1.8	1.8820
0.015	4.5085	-3.9	2.2598	-3.3	2.3341	-3.0	2.2598	-2.7	2.1834	-2.4	2.1091	-2.1	1.9584
0.016	4.8091	-4.2	2.4105	-3.6	2.4848	-3.3	2.4105	-3.0	2.3341	-3.0	2.2598	-2.4	2.1091
0.017	5.1097	-4.5	2.5612	-3.9	2.6355	-3.6	2.5612	-3.3	2.4848	-3.0	2.4105	-2.7	2.2598
0.018	5.4103	-4.8	2.7119	-4.2	2.7862	-3.9	2.7119	-3.6	2.6355	-3.3	2.5612	-3.0	2.4105
0.019	5.7109	-5.1	2.8626	-4.5	2.9369	-4.2	2.8626	-3.9	2.7862	-3.6	2.7119	-3.3	2.5612
0.020	6.0115	-5.4	3.0133	-4.8	3.0876	-4.5	3.0133	-4.2	2.9369	-3.9	2.8626	-3.6	2.7119
0.021	6.3121	-5.7	3.1640	-5.1	3.2383	-4.8	3.1640	-4.5	3.0876	-4.2	3.0133	-3.9	2.8626
0.022	6.6127	-6.0	3.3147	-5.4	3.3890	-5.1	3.3147	-4.8	3.2383	-4.5	3.1640	-4.2	3.0133
0.023	6.9133	-6.3	3.4654	-5.7	3.5397	-5.4	3.4654	-5.1	3.3890	-4.8	3.3147	-4.5	3.1640
0.024	7.2139	-6.6	3.6161	-6.0	3.6904	-5.7	3.6161	-5.4	3.5397	-5.1	3.4654	-4.8	3.3147
0.025	7.5145	-6.9	3.7668	-6.3	3.8411	-6.0	3.7668	-5.7	3.6904	-5.4	3.6161	-5.1	3.4654
0.026	7.8151	-7.2	3.9175	-6.6	3.9918	-6.3	3.9175	-6.0	3.8411	-5.7	3.7668	-5.4	3.6161
0.027	8.1157	-7.5	4.0682	-6.9	4.1425	-6.6	4.0682	-6.3	3.9918	-6.0	3.9175	-5.7	3.7668
0.028	8.4163	-7.8	4.2189	-7.2	4.2932	-6.9	4.2189	-6.6	4.1425	-6.3	4.0682	-6.0	3.9175
0.029	8.7169	-8.1	4.3700	-7.5	4.4443	-7.2	4.3700	-6.9	4.2932	-6.6	4.2189	-6.3	4.0682
0.030	9.0175	-8.4	4.5211	-7.8	4.5954	-7.5	4.5211	-7.2	4.4443	-6.9	4.3700	-6.6	4.2189
0.031	9.3181	-8.7	4.6722	-8.1	4.7465	-7.8	4.6722	-7.5	4.5954	-7.2	4.5211	-6.9	4.3700
0.032	9.6187	-9.0	4.8233	-8.4	4.8976	-8.1	4.8233	-7.8	4.7465	-7.5	4.6722	-7.2	4.5211
0.033	9.9193	-9.3	4.9744	-8.7	5.0487	-8.4	4.9744	-8.1	4.8976	-7.8	4.8233	-7.5	4.6722
0.034	10.2199	-9.6	5.1255	-9.0	5.1998	-8.7	5.1255	-8.4	5.0487	-8.1	4.9744	-7.8	4.8233
0.035	10.5205	-9.9	5.2766	-9.3	5.3509	-9.0	5.2766	-8.7	5.1998	-8.4	5.1255	-8.1	4.9744
0.036	10.8211	-10.2	5.4277	-9.6	5.5020	-9.3	5.4277	-9.0	5.3509	-8.7	5.2766	-8.4	5.1255
0.037	11.1217	-10.5	5.5788	-9.9	5.6531	-9.6	5.5788	-9.3	5.5020	-9.0	5.4277	-8.7	5.2766
0.038	11.4223	-10.8	5.7300	-10.2	5.8042	-9.9	5.7300	-9.6	5.6531	-9.3	5.5788	-9.0	5.4277
0.039	11.7229	-11.1	5.8811	-10.5	5.9553	-10.2	5.8811	-9.9	5.8042	-9.6	5.7300	-9.3	5.5788
0.040	12.0235	-11.4	6.0322	-10.8	6.1064	-10.5	6.0322	-10.2	5.9553	-9.9	5.8811	-9.6	5.7300
0.041	12.3241	-11.7	6.1833	-11.1	6.2575	-10.8	6.1833	-10.5	6.1064	-10.2	6.0322	-9.9	5.8811
0.042	12.6247	-12.0	6.3344	-11.4	6.4086	-11.1	6.3344	-10.8	6.2575	-10.5	6.1833	-10.2	6.0322
0.043	12.9253	-12.3	6.4855	-11.7	6.5597	-11.4	6.4855	-11.1	6.4086	-10.8	6.3344	-10.5	6.1833
0.044	13.2259	-12.6	6.6366	-12.0	6.7108	-11.7	6.6366	-11.4	6.5597	-11.1	6.4855	-10.8	6.3344
0.045	13.5265	-12.9	6.7877	-12.3	6.8619	-12.0	6.7877	-11.7	6.7108	-11.4	6.6366	-11.1	6.4855
0.046	13.8271	-13.2	6.9388	-12.6	6.9620	-12.3	6.9388	-12.0	6.8619	-11.7	6.7877	-11.4	6.6366
0.047	14.1277	-13.5	7.0899	-12.9	7.1131	-12.6	7.0899	-12.3	6.9620	-12.0	6.9388	-11.7	6.7877
0.048	14.4283	-13.8	7.2410	-13.2	7.2642	-12.9	7.2410	-12.6	7.1131	-12.3	7.0899	-12.0	6.9388
0.049	14.7289	-14.1	7.3921	-13.5	7.4153	-13.2	7.3921	-12.9	7.2642	-12.6	7.2410	-12.3	7.0899
0.050	15.0295	-14.4	7.5432	-13.8	7.5664	-13.5	7.5432	-13.2	7.4153	-12.9	7.3921	-12.6	7.2410
0.051	15.3301	-14.7	7.6943	-14.1	7.7175	-13.8	7.6943	-13.5	7.5664	-13.2	7.5432	-12.9	7.3921
0.052	15.6307	-15.0	7.8454	-14.4	7.8686	-14.1	7.8454	-14.1	7.7175	-13.8	7.6943	-13.5	7.5432
0.053	15.9313	-15.3	7.9965	-14.7	8.0197	-14.4	7.9965	-14.1	7.8686	-14.1	7.8454	-14.1	7.7175
0.054	16.2319	-15.6	8.1476	-15.0	8.1708	-14.7	8.1476	-14.4	8.0197	-14.1	7.9965	-14.1	7.8454
0.055	16.5325	-15.9	8.2987	-15.3	8.3219	-15.0	8.2987	-14.7	8.1708	-14.4	8.1476	-14.4	7.9965
0.056	16.8331	-16.2	8.4498	-15.6	8.4730	-15.3	8.4498	-15.0	8.3219	-15.0	8.2987	-14.7	8.1476
0.057	17.1337	-16.5	8.6009	-15.9	8.6241	-15.6	8.6009	-15.3	8.4730	-15.3	8.4498	-15.0	8.2987
0.058	17.4343	-16.8	8.7520	-16.2	8.7752	-15.9	8.7520	-15.6	8.6241	-15.6	8.6009	-15.3	8.4498
0.059	17.7349	-17.1	8.9031	-16.5	8.9263	-16.2	8.9031	-15.9	8.7752	-15.9	8.7520	-15.6	8.6009
0.060	18.0355	-17.4	9.0542	-16.8	9.0774	-16.5	9.0542	-16.2	8.9263	-16.2	8.9031	-15.9	8.7520
0.061	18.3361	-17.7	9.2053	-17.1	9.2285	-16.8	9.2053	-16.5	9.0774	-16.5	9.0542	-16.2	8.9031
0.062	18.6367	-18.0	9.3564	-17.4	9.3796	-17.1	9.3564	-16.8	9.2285	-16.8	9.2053	-16.5	9.0542
0.063	18.9373	-18.3	9.5075	-17.7	9.5307	-17.4	9.5075	-17.1	9.3796	-17.1	9.3564	-16.8	9.2053
0.064	19.2379	-18.6	9.6586	-18.0	9.6818	-17.7	9.6586	-17.4	9.5307	-17.4	9.5075	-17.1	9.3564
0.065	19.5385	-18.9	9.8097	-18.3	9.8330	-18.0	9.8097	-17.7	9.6818	-17.7	9.6586	-17.4	9.5075
0.066	19.8391	-19.2	9.9608	-18.6	9.9840	-18.3	9.9608	-18.0	9.8330	-18.0	9.8097	-17.7	9.6586
0.067	20.1397	-19.5	10.1119	-18.9	10.1351	-18.6	10.1119	-18.3	9.9840	-18.3	9.9608	-18.0	9.8330
0.068	20.4403	-19.8	10.2630	-19.2	10.2862	-18.9	10.2630	-18.6	10.1351	-18.6	10.1119	-18.3	9.9840
0.069	20.7409	-20.1	10.4141	-19.5	10.4374	-19.2	10.4141	-18.9	10.2862	-18.9	10.2630	-18.6	10.1351
0.070	21.0415	-20.4	10.5652	-19.8	10.5885	-19.5	10.5652	-19.2	10.4374	-19.2	10.4141	-18.9	10.2630
0.071	21.3421	-20.7	10.7163	-20.1	10.7396	-19.8	10.7163	-19.5	10.5885	-19.5	10.5652	-19.2	10.4374
0.072	21.6427	-21.0	10.8674	-20.4	10.8908	-20.1	10.8674	-19.8	10.7396	-19.8	10.7163	-19.5	10.5885
0.073	21.9433	-21.3	11.0185	-20.7	11.0440	-20.4	11.0185	-20.1	10.8908	-20.1	10.8674	-19.8	10.7396
0.074	22.2439	-21.6	11.1696	-21.0	11.1951	-20.7	11.1696	-20.4	11.0440	-20.4	11.0185	-20.1	10.8908
0.075	22.5445	-21.9	11.3207	-21.3	11.3462	-21.0	11.3207	-20.7	11.1951	-20.7	11.1696	-20.4	11.0440
0.076	22.8451	-22.2	11.4718	-21.6	11.4917	-21.3	11.4718	-21.0	11.3462	-21.0	11.3207	-20.7	11.1951
0.077	23.1457	-22.5	11.6229	-21.9	11.6428	-21.6	11.6229	-21.3	11.4917	-21.3	11.4718	-21.0	11.3462
0.078	23.4463	-22.8	11.7740	-22.2	11.7940	-21.9	11.7740	-21.6	11.6428	-21.6	11.6229	-21.3	11.4917
0.079	23.7469	-23.1	11.9251	-22.5	11.9451	-22.2	11.9251	-21.9	11.7940	-21.9	11.7740	-21.6	11.6428
0.080	24.0475	-23.4	12.0762	-22.8	12.0962	-22.5	12.0762	-22.2	11.9451	-22.2	11.9251	-21.9	11.7940
0.081	24.3481	-23.7	12.2273	-23.1	12.2473	-22.8	12.2273	-22.5	12.0962	-22.5	12.0762	-22.2	11.9451
0.082	24.6487	-24.0	12.3784	-23.4	12.3984	-23.1	12.3784	-22.8	12.2473	-22.8	12.2273	-22.5	12.0962
0.083	24.9493	-24.3	12.5295	-23.7	12.5495	-23.4	12.5295	-23.1	12.3984	-23.1	12.3784	-22.8	12.2473
0.084	25.2499	-24.6	12.6806	-24.0	12.7006	-23.7	12.6806	-23.4	12.5495	-23.4	12.5295	-23.1	12.3984
0.085	25.5505	-24.9	12.8317	-24.3	12.8517	-24.0	12.8317	-23.7	12.7006	-23.7	12.6806	-23.4	12.549

- 213 -

表 2-8 $\rho = 0.8$

λ	ξ	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.001	0.2052	-1	0.4337	-1	0.1472	-2	0.1940	-2	0.1044	-1	0.8404	-1	0.1298	-1
0.002	0.4004	-1	0.1387	-2	0.2934	-2	0.1908	-1	0.7618	-1	0.1784	-1	0.2423	-1
0.003	0.5976	-1	0.1387	-2	0.2934	-2	0.1908	-1	0.7618	-1	0.1784	-1	0.2423	-1
0.004	0.8016	-1	0.2175	-2	0.5827	-2	0.3446	-1	0.9714	-1	0.2833	-1	0.3110	-1
0.005	1.0000	-1	0.4004	-1	0.8404	-1	0.5976	-1	1.1387	-1	0.4337	-1	0.5125	-1
0.006	1.1984	-1	0.5782	-2	1.0999	-1	0.8016	-1	1.3870	-1	0.6000	-1	0.6810	-1
0.007	1.3968	-1	0.7560	-2	1.3582	-1	1.0599	-1	1.6354	-1	0.7688	-1	0.8500	-1
0.008	1.5952	-1	0.9337	-2	1.6165	-1	1.3182	-1	1.8837	-1	0.9365	-1	1.0188	-1
0.009	1.7936	-1	1.1115	-2	1.8748	-1	1.5765	-1	2.1320	-1	1.1042	-1	1.1876	-1
0.01	1.9920	-1	1.2893	-2	2.1331	-1	1.8348	-1	2.3759	-1	1.2700	-1	1.3564	-1
0.02	2.1904	-1	1.4671	-2	2.3914	-1	2.0931	-1	2.6198	-1	1.4354	-1	1.5252	-1
0.03	2.3888	-1	1.6449	-2	2.6497	-1	2.3514	-1	2.8637	-1	1.5954	-1	1.6940	-1
0.04	2.5872	-1	1.8227	-2	2.9080	-1	2.6097	-1	3.1076	-1	1.7554	-1	1.8628	-1
0.05	2.7856	-1	2.0005	-2	3.1663	-1	2.8680	-1	3.3515	-1	1.9154	-1	2.0316	-1
0.06	2.9840	-1	2.1783	-2	3.4246	-1	3.1263	-1	3.5954	-1	2.0754	-1	2.2004	-1
0.07	3.1824	-1	2.3561	-2	3.6829	-1	3.3846	-1	3.8393	-1	2.2354	-1	2.3692	-1
0.08	3.3808	-1	2.5339	-2	3.9412	-1	3.6429	-1	4.0832	-1	2.3954	-1	2.5380	-1
0.09	3.5792	-1	2.7117	-2	4.1995	-1	3.9012	-1	4.3271	-1	2.5554	-1	2.7068	-1
0.10	3.7776	-1	2.8895	-2	4.4578	-1	4.1595	-1	4.5710	-1	2.7154	-1	2.8756	-1
0.12	4.1760	-1	3.2453	-2	4.9636	-1	4.6153	-1	5.0268	-1	3.0712	-1	3.2314	-1
0.14	4.5744	-1	3.6011	-2	5.4694	-1	5.0711	-1	5.4826	-1	3.4270	-1	3.5872	-1
0.16	4.9728	-1	3.9569	-2	5.9752	-1	5.5269	-1	5.9384	-1	3.7828	-1	3.9430	-1
0.18	5.3712	-1	4.3127	-2	6.4810	-1	5.9827	-1	6.3942	-1	4.1386	-1	4.2988	-1
0.20	5.7696	-1	4.6685	-2	6.9868	-1	6.4385	-1	6.8500	-1	4.4944	-1	4.6546	-1
0.22	6.1680	-1	5.0243	-2	7.4926	-1	6.8943	-1	7.3058	-1	4.8502	-1	5.0104	-1
0.24	6.5664	-1	5.3801	-2	7.9984	-1	7.3501	-1	7.7616	-1	5.2060	-1	5.3662	-1
0.26	6.9648	-1	5.7359	-2	8.5042	-1	7.8059	-1	8.2174	-1	5.5618	-1	5.7220	-1
0.28	7.3632	-1	6.0917	-2	9.0100	-1	8.2617	-1	8.6732	-1	5.9176	-1	6.0778	-1
0.30	7.7616	-1	6.4475	-2	9.5158	-1	8.7175	-1	9.1290	-1	6.2734	-1	6.4336	-1
0.32	8.1600	-1	6.8033	-2	10.0216	-1	9.1733	-1	9.5848	-1	6.6292	-1	6.7894	-1
0.34	8.5584	-1	7.1591	-2	10.5274	-1	9.6291	-1	10.0406	-1	6.9850	-1	7.1452	-1
0.36	8.9568	-1	7.5149	-2	11.0332	-1	10.0849	-1	10.4964	-1	7.3408	-1	7.5010	-1
0.38	9.3552	-1	7.8707	-2	11.5390	-1	10.5407	-1	10.9522	-1	7.6966	-1	7.8568	-1
0.40	9.7536	-1	8.2265	-2	12.0448	-1	11.0005	-1	11.4080	-1	8.0524	-1	8.2126	-1
0.42	10.1520	-1	8.5823	-2	12.5506	-1	11.4563	-1	11.8638	-1	8.4082	-1	8.5684	-1
0.44	10.5504	-1	8.9381	-2	13.0564	-1	11.9121	-1	12.3196	-1	8.7640	-1	8.9242	-1
0.46	10.9488	-1	9.2939	-2	13.5622	-1	12.3679	-1	12.7754	-1	9.1198	-1	9.2800	-1
0.48	11.3472	-1	9.6497	-2	14.0680	-1	12.8237	-1	13.2312	-1	9.4756	-1	9.6358	-1
0.50	11.7456	-1	10.0055	-2	14.5738	-1	13.2795	-1	13.6870	-1	9.8314	-1	10.0000	-1
0.52	12.1440	-1	10.3613	-2	15.0796	-1	13.7353	-1	14.1428	-1	10.1872	-1	10.3642	-1
0.54	12.5424	-1	10.7171	-2	15.5854	-1	14.1911	-1	14.5986	-1	10.5430	-1	10.7284	-1
0.56	12.9408	-1	11.0729	-2	16.0912	-1	14.6469	-1	15.0544	-1	10.8988	-1	11.0926	-1
0.58	13.3392	-1	11.4287	-2	16.5970	-1	15.1027	-1	15.5102	-1	11.2546	-1	11.4568	-1
0.60	13.7376	-1	11.7845	-2	17.1028	-1	15.5585	-1	15.9660	-1	11.6104	-1	11.8210	-1
0.62	14.1360	-1	12.1403	-2	17.6086	-1	16.0143	-1	16.4218	-1	11.9662	-1	12.1852	-1
0.64	14.5344	-1	12.4961	-2	18.1144	-1	16.4701	-1	16.8776	-1	12.3220	-1	12.5494	-1
0.66	14.9328	-1	12.8519	-2	18.6202	-1	16.9259	-1	17.3334	-1	12.6778	-1	12.9136	-1
0.68	15.3312	-1	13.2077	-2	19.1260	-1	17.3817	-1	17.7892	-1	13.0336	-1	13.2778	-1
0.70	15.7296	-1	13.5635	-2	19.6318	-1	17.8375	-1	18.2450	-1	13.3894	-1	13.6420	-1
0.72	16.1280	-1	13.9193	-2	20.1376	-1	18.2933	-1	18.7008	-1	13.7452	-1	14.0062	-1
0.74	16.5264	-1	14.2751	-2	20.6434	-1	18.7491	-1	19.1566	-1	14.1010	-1	14.3704	-1
0.76	16.9248	-1	14.6309	-2	21.1492	-1	19.2049	-1	19.6124	-1	14.4568	-1	14.7346	-1
0.78	17.3232	-1	14.9867	-2	21.6550	-1	19.6607	-1	20.0682	-1	14.8126	-1	15.0988	-1
0.80	17.7216	-1	15.3425	-2	22.1608	-1	20.1165	-1	20.5240	-1	15.1684	-1	15.4630	-1
0.82	18.1200	-1	15.6983	-2	22.6666	-1	20.5723	-1	20.9798	-1	15.5242	-1	15.8272	-1
0.84	18.5184	-1	16.0541	-2	23.1724	-1	21.0281	-1	21.4356	-1	15.8800	-1	16.1914	-1
0.86	18.9168	-1	16.4099	-2	23.6782	-1	21.4839	-1	21.8914	-1	16.2358	-1	16.5556	-1
0.88	19.3152	-1	16.7657	-2	24.1840	-1	21.9397	-1	22.3472	-1	16.5916	-1	16.9198	-1
0.90	19.7136	-1	17.1215	-2	24.6898	-1	22.3955	-1	22.8030	-1	16.9474	-1	17.2840	-1
0.92	20.1120	-1	17.4773	-2	25.1956	-1	22.8513	-1	23.2588	-1	17.3032	-1	17.6482	-1
0.94	20.5104	-1	17.8331	-2	25.7014	-1	23.3071	-1	23.7146	-1	17.6590	-1	18.0124	-1
0.96	20.9088	-1	18.1889	-2	26.2072	-1	23.7629	-1	24.1704	-1	18.0148	-1	18.3766	-1
0.98	21.3072	-1	18.5447	-2	26.7130	-1	24.2187	-1	24.6262	-1	18.3706	-1	18.7408	-1
1.00	21.7056	-1	18.9005	-2	27.2188	-1	24.6745	-1	25.0820	-1	18.7264	-1	19.1050	-1

- 215 -

$F(E, \eta)$	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.001	0.1001	0.0942	0.1894	0.1890	0.1897	0.1897	0.1897	0.1897	0.1897	0.1897	0.1897	0.1897	0.1897
0.002	0.1001	0.0942	0.1894	0.1890	0.1897	0.1897	0.1897	0.1897	0.1897	0.1897	0.1897	0.1897	0.1897
0.003	0.1004	0.0945	0.1904	0.1900	0.1907	0.1907	0.1907	0.1907	0.1907	0.1907	0.1907	0.1907	0.1907
0.004	0.1008	0.0949	0.1914	0.1910	0.1917	0.1917	0.1917	0.1917	0.1917	0.1917	0.1917	0.1917	0.1917
0.005	0.1012	0.0953	0.1924	0.1920	0.1927	0.1927	0.1927	0.1927	0.1927	0.1927	0.1927	0.1927	0.1927
0.006	0.1016	0.0957	0.1934	0.1930	0.1937	0.1937	0.1937	0.1937	0.1937	0.1937	0.1937	0.1937	0.1937
0.007	0.1020	0.0961	0.1944	0.1940	0.1947	0.1947	0.1947	0.1947	0.1947	0.1947	0.1947	0.1947	0.1947
0.008	0.1024	0.0965	0.1954	0.1950	0.1957	0.1957	0.1957	0.1957	0.1957	0.1957	0.1957	0.1957	0.1957
0.009	0.1028	0.0969	0.1964	0.1960	0.1967	0.1967	0.1967	0.1967	0.1967	0.1967	0.1967	0.1967	0.1967
0.01	0.1032	0.0973	0.1974	0.1970	0.1977	0.1977	0.1977	0.1977	0.1977	0.1977	0.1977	0.1977	0.1977
0.02	0.1040	0.0981	0.1984	0.1980	0.1987	0.1987	0.1987	0.1987	0.1987	0.1987	0.1987	0.1987	0.1987
0.03	0.1048	0.0989	0.1994	0.1990	0.1997	0.1997	0.1997	0.1997	0.1997	0.1997	0.1997	0.1997	0.1997
0.04	0.1056	0.0997	0.2004	0.2000	0.2007	0.2007	0.2007	0.2007	0.2007	0.2007	0.2007	0.2007	0.2007
0.05	0.1064	0.1005	0.2014	0.2010	0.2017	0.2017	0.2017	0.2017	0.2017	0.2017	0.2017	0.2017	0.2017
0.06	0.1072	0.1013	0.2024	0.2020	0.2027	0.2027	0.2027	0.2027	0.2027	0.2027	0.2027	0.2027	0.2027
0.07	0.1080	0.1021	0.2034	0.2030	0.2037	0.2037	0.2037	0.2037	0.2037	0.2037	0.2037	0.2037	0.2037
0.08	0.1088	0.1029	0.2044	0.2040	0.2047	0.2047	0.2047	0.2047	0.2047	0.2047	0.2047	0.2047	0.2047
0.09	0.1096	0.1037	0.2054	0.2050	0.2057	0.2057	0.2057	0.2057	0.2057	0.2057	0.2057	0.2057	0.2057
0.10	0.1104	0.1045	0.2064	0.2060	0.2067	0.2067	0.2067	0.2067	0.2067	0.2067	0.2067	0.2067	0.2067
0.11	0.1112	0.1053	0.2074	0.2070	0.2077	0.2077	0.2077	0.2077	0.2077	0.2077	0.2077	0.2077	0.2077
0.12	0.1120	0.1061	0.2084	0.2080	0.2087	0.2087	0.2087	0.2087	0.2087	0.2087	0.2087	0.2087	0.2087
0.13	0.1128	0.1069	0.2094	0.2090	0.2097	0.2097	0.2097	0.2097	0.2097	0.2097	0.2097	0.2097	0.2097
0.14	0.1136	0.1077	0.2104	0.2100	0.2107	0.2107	0.2107	0.2107	0.2107	0.2107	0.2107	0.2107	0.2107
0.15	0.1144	0.1085	0.2114	0.2110	0.2117	0.2117	0.2117	0.2117	0.2117	0.2117	0.2117	0.2117	0.2117
0.16	0.1152	0.1093	0.2124	0.2120	0.2127	0.2127	0.2127	0.2127	0.2127	0.2127	0.2127	0.2127	0.2127
0.17	0.1160	0.1101	0.2134	0.2130	0.2137	0.2137	0.2137	0.2137	0.2137	0.2137	0.2137	0.2137	0.2137
0.18	0.1168	0.1109	0.2144	0.2140	0.2147	0.2147	0.2147	0.2147	0.2147	0.2147	0.2147	0.2147	0.2147
0.19	0.1176	0.1117	0.2154	0.2150	0.2157	0.2157	0.2157	0.2157	0.2157	0.2157	0.2157	0.2157	0.2157
0.20	0.1184	0.1125	0.2164	0.2160	0.2167	0.2167	0.2167	0.2167	0.2167	0.2167	0.2167	0.2167	0.2167
0.21	0.1192	0.1133	0.2174	0.2170	0.2177	0.2177	0.2177	0.2177	0.2177	0.2177	0.2177	0.2177	0.2177
0.22	0.1200	0.1141	0.2184	0.2180	0.2187	0.2187	0.2187	0.2187	0.2187	0.2187	0.2187	0.2187	0.2187
0.23	0.1208	0.1149	0.2194	0.2190	0.2197	0.2197	0.2197	0.2197	0.2197	0.2197	0.2197	0.2197	0.2197
0.24	0.1216	0.1157	0.2204	0.2200	0.2207	0.2207	0.2207	0.2207	0.2207	0.2207	0.2207	0.2207	0.2207
0.25	0.1224	0.1165	0.2214	0.2210	0.2217	0.2217	0.2217	0.2217	0.2217	0.2217	0.2217	0.2217	0.2217
0.26	0.1232	0.1173	0.2224	0.2220	0.2227	0.2227	0.2227	0.2227	0.2227	0.2227	0.2227	0.2227	0.2227
0.27	0.1240	0.1181	0.2234	0.2230	0.2237	0.2237	0.2237	0.2237	0.2237	0.2237	0.2237	0.2237	0.2237
0.28	0.1248	0.1189	0.2244	0.2240	0.2247	0.2247	0.2247	0.2247	0.2247	0.2247	0.2247	0.2247	0.2247
0.29	0.1256	0.1197	0.2254	0.2250	0.2257	0.2257	0.2257	0.2257	0.2257	0.2257	0.2257	0.2257	0.2257
0.30	0.1264	0.1205	0.2264	0.2260	0.2267	0.2267	0.2267	0.2267	0.2267	0.2267	0.2267	0.2267	0.2267
0.31	0.1272	0.1213	0.2274	0.2270	0.2277	0.2277	0.2277	0.2277	0.2277	0.2277	0.2277	0.2277	0.2277
0.32	0.1280	0.1221	0.2284	0.2280	0.2287	0.2287	0.2287	0.2287	0.2287	0.2287	0.2287	0.2287	0.2287
0.33	0.1288	0.1229	0.2294	0.2290	0.2297	0.2297	0.2297	0.2297	0.2297	0.2297	0.2297	0.2297	0.2297
0.34	0.1296	0.1237	0.2304	0.2300	0.2307	0.2307	0.2307	0.2307	0.2307	0.2307	0.2307	0.2307	0.2307
0.35	0.1304	0.1245	0.2314	0.2310	0.2317	0.2317	0.2317	0.2317	0.2317	0.2317	0.2317	0.2317	0.2317
0.36	0.1312	0.1253	0.2324	0.2320	0.2327	0.2327	0.2327	0.2327	0.2327	0.2327	0.2327	0.2327	0.2327
0.37	0.1320	0.1261	0.2334	0.2330	0.2337	0.2337	0.2337	0.2337	0.2337	0.2337	0.2337	0.2337	0.2337
0.38	0.1328	0.1269	0.2344	0.2340	0.2347	0.2347	0.2347	0.2347	0.2347	0.2347	0.2347	0.2347	0.2347
0.39	0.1336	0.1277	0.2354	0.2350	0.2357	0.2357	0.2357	0.2357	0.2357	0.2357	0.2357	0.2357	0.2357
0.40	0.1344	0.1285	0.2364	0.2360	0.2367	0.2367	0.2367	0.2367	0.2367	0.2367	0.2367	0.2367	0.2367
0.41	0.1352	0.1293	0.2374	0.2370	0.2377	0.2377	0.2377	0.2377	0.2377	0.2377	0.2377	0.2377	0.2377
0.42	0.1360	0.1301	0.2384	0.2380	0.2387	0.2387	0.2387	0.2387	0.2387	0.2387	0.2387	0.2387	0.2387
0.43	0.1368	0.1309	0.2394	0.2390	0.2397	0.2397	0.2397	0.2397	0.2397	0.2397	0.2397	0.2397	0.2397
0.44	0.1376	0.1317	0.2404	0.2400	0.2407	0.2407	0.2407	0.2407	0.2407	0.2407	0.2407	0.2407	0.2407
0.45	0.1384	0.1325	0.2414	0.2410	0.2417	0.2417	0.2417	0.2417	0.2417	0.2417	0.2417	0.2417	0.2417
0.46	0.1392	0.1333	0.2424	0.2420	0.2427	0.2427	0.2427	0.2427	0.2427	0.2427	0.2427	0.2427	0.2427
0.47	0.1400	0.1341	0.2434	0.2430	0.2437	0.2437	0.2437	0.2437	0.2437	0.2437	0.2437	0.2437	0.2437
0.48	0.1408	0.1349	0.2444	0.2440	0.2447	0.2447	0.2447	0.2447	0.2447	0.2447	0.2447	0.2447	0.2447
0.49	0.1416	0.1357	0.2454	0.2450	0.2457	0.2457	0.2457	0.2457	0.2457	0.2457	0.2457	0.2457	0.2457
0.50	0.1424	0.1365	0.2464	0.2460	0.2467	0.2467	0.2467	0.2467	0.2467	0.2467	0.2467	0.2467	0.2467
0.51	0.1432	0.1373	0.2474	0.2470	0.2477	0.2477	0.2477	0.2477	0.2477	0.2477	0.2477	0.2477	0.2477
0.52	0.1440	0.1381	0.2484	0.2480	0.2487	0.2487	0.2487	0.2487	0.2487	0.2487	0.2487	0.2487	0.2487
0.53	0.1448	0.1389	0.2494	0.2490	0.2497	0.2497	0.2497	0.2497	0.2497	0.2497	0.2497	0.2497	0.2497
0.54	0.1456	0.1397	0.2504	0.2500	0.2507	0.2507	0.2507	0.2507	0.2507	0.2507	0.2507	0.2507	0.2507
0.55	0.1464	0.1405	0.2514	0.2510	0.2517	0.2517	0.2517	0.2517	0.2517	0.2517	0.2517	0.2517	0.2517
0.56	0.1472	0.1413	0.2524	0.2520	0.2527	0.2527	0.2527	0.2527	0.2527	0.2527	0.2527	0.2527	0.2527
0.57	0.1480	0.1421	0.2534	0.2530	0.2537	0.2537	0.2537	0.2537	0.2537	0.2537	0.2537	0.2537	0.2537
0.58	0.1488	0.1429	0.2544	0.2540	0.2547	0.2547	0.2547	0.2547	0.2547	0.2547	0.2547	0.2547	0.2547
0.59	0.1496	0.1437	0.2554	0.2550	0.2557	0.2557	0.2557	0.2557	0.2557	0.2557	0.2557	0.2557	0.2557
0.60	0.1504	0.1445	0.2564	0.2560	0.2567	0.2567	0.2567	0.2567	0.2567	0.2567	0.2567	0.2567	0.2567
0.61	0.1512	0.1453	0.2574	0.2570	0.2577	0.2577	0.2577	0.2577	0.2577	0.2577	0.2577	0.2577	0.2577
0.62	0.1520	0.1461	0.2584	0.2580	0.2587	0.2587	0.2587	0.2587	0.2587	0.2587	0.2587	0.2587	0.2587
0.63	0.1528	0.1469	0.2594	0.2590	0.2597	0.2597	0.2597	0.2597	0.2597	0.2597	0.2597	0.2597	0.2597
0.64	0.1536	0.1477	0.2604	0.2600	0.2607	0.2607	0.2607	0.2607	0.2607	0.2607	0.2607	0.2607	0.2607
0.65	0.1544	0.1485	0.2614	0.2610	0.2617	0.2617	0.2617	0.2617	0.2617	0.2617	0.2617	0.2617	0.2617
0.66	0.1552	0.1493	0.2624	0.2620	0.2627	0.2627	0.2627	0.2627	0.2627	0.2627	0.2627	0.2627	0.2627
0.67	0.1560	0.1501	0.2634	0.2630	0.2637	0.2637	0.2637	0.2637	0.2637	0.2637	0.2637	0.2637	0.2637
0.68	0.1568	0.1509	0.2644	0.2640	0.2647	0.2647	0.2647	0.2647	0.2647	0.2647	0.2647	0.2647	0.2647
0.69	0.1576	0.1517	0.2654										

